



# **Anwendung mathematischer Funktionen auf biologische Abläufe in Hinblick auf die Gewässerökologie**

Fachbereichsarbeit in Mathematik und Biologie  
von  
**Irene Teubner**

**BRG II Salzburg**  
**Mondssee, am 22.02.2005**



## Vorwort

Die Mathematik hat mich schon seit den frühen Jahren meiner schulischen Laufbahn begeistert. Aus diesem Grund wollte ich mein Wissen erweitern, weshalb ich mich schließlich dazu entschloss eine Fachbereichsarbeit zu verfassen, um mich somit mit verschiedenen mathematischen Themen näher auseinander zu setzen. Doch habe ich recht schnell erkannt, dass mir eine Beschränkung auf rein theoretische Abhandlungen nicht genügt. Deshalb habe ich mich über die unterschiedlichen praktischen Anwendungsbereiche der Mathematik informiert. Da mich die Biologie mit ihrer Bedeutung für unser tägliches Leben ebenfalls sehr interessiert, bin ich zu dem Schluss gekommen, dass sich diese beiden naturwissenschaftlichen Bereiche gut mit einander kombinieren lassen und ich somit die Verbindungen in einer fächerübergreifende Fachbereichsarbeit darstellen kann. In der Schule hatte ich nicht sehr oft die Gelegenheit Zusammenhänge so tiefgreifend und so weit über ein bestimmtes Unterrichtsfach hinausgehend zu studieren.

Außerdem möchte ich die Gelegenheit nutzen und jenen danken, die mich tatkräftig unterstützt haben. Zum einen danke ich meinen betreuenden Professoren Frau Mag. Claudia Dörrich und Herrn Mag. Dr. Wolfgang Leoplinger, die mir stets hilfreiche Ratschläge aus der Mathematik und der Biologie erteilen konnten. Ebenso danke ich Herrn Mag. Dr. Andreas Sandmayr für seine Unterstützung bei der Gestaltung des Layouts. Besonderer Dank gilt dabei auch meinen Eltern, die mir mit hilfreichen Diskussionen zu meiner Fachbereichsarbeit zur Seite standen.

# 1. Inhaltsverzeichnis

1. Inhaltsverzeichnis	1
2. Einleitung: Bedeutung mathematischer Kurvenmodelle in der Gewässerökologie	2
3. Methode: mathematische Anpassung der Kurvenmodelle	4
3.1. Theorie der Kurvenanpassung mit der Methode der kleinsten Quadrate	4
3.1.1. Lineare Kurvenanpassung	4
3.1.2. Nichtlineare Kurvenanpassungen	7
3.1.2.1. Sinusschwingung	7
3.1.2.2. Exponentialfunktion	10
3.1.2.3. Weitere nichtlineare Kurvenanpassungen	11
3.2. Weitere Möglichkeiten zur Verbesserung der Kurvenanpassung	11
3.3. Gütemaß der Kurvenanpassung	12
4. Anwendung der Kurvenanpassung in der Gewässerökologie	13
4.1. Mehrjähriger Verlauf der Wassertemperatur - eine trigonometrische Funktion	13
4.1.1. Beschreibung der mathematischen Auswertung der trigonometrischen Funktion	14
4.1.1.1. Berechnung der Kurvenparameter mittels einer Exceltabelle	14
4.1.1.2. Graphische Beschreibung in Mathematika: Warum werden Temperaturverläufe nicht mittels Polynomfunktion sondern besser über Sinusschwingungen angepasst?	18
4.1.2. Bewertung der Parameter der Kurvenanpassung: Abhängigkeit der Wassertemperatur vom Klima und Wetter	19
4.2. Unterwasser Lichtprofile – eine Exponentialfunktionen	25
4.2.1. Beschreibung der Auswertung der Exponentialfunktion in einer Exceltabelle	26
4.2.2. Bewertung der Parameter der Unterwasser-Lichtprofile: Abhängigkeit der Lichtabnahme von der Trübe und der Algenentwicklung im See	28
5. Zusammenfassung	30
6. Literaturverzeichnis	32
7. Abbildungs- und Tabellenverzeichnis	33
8. Stichwortverzeichnis	35

## **2. Einleitung: Bedeutung mathematischer Kurvenmodelle in der Gewässerökologie**

Um Ökosysteme zu erkunden werden Messdaten zur Beschreibung von Aufbau, Strukturen und Prozessen erhoben. Zum Aufbau zählt zum Beispiel die Schichtung eines Gewässers infolge einer jahreszeitlich bedingten Erwärmung und Abkühlung, zu den Strukturen die Biomasse von Viren, Bakterien, Algen, Zooplankton und Fischen und zu den Prozessen Wachstums- und eventuelle Fressraten der Lebewesen. Mathematische Modelle werden angewendet um Aufbau, Strukturen und Prozesse treffend beschreiben zu können. Dabei können nur bestimmte mathematische Funktionen einen Datensatz sinnvoll beschreiben. So verlaufen alle Wachstums- und Abbauprozesse von der Physik bis zur Biologie exponentiell. Aus diesem Grund wird eine exponentielle Funktion zur Beschreibung des Wachstums der Algen in Gewässern verwendet und nicht etwa „eine Funktion die zufällig“ passt (siehe auch Kapitel 3).

Da alle Messungen sowohl im See als auch bei Experimenten Abweichungen unterliegen, muss man davon ausgehen, dass die theoretische Beschreibung durch ein Modell den Messwerten nicht in jedem Fall entspricht. Wenn die Abweichungen des „theoretischen“ Modells von den Daten zu groß sind, gibt es zwei Fragen, die man sich nun stellen wird:

1.: Liegen die Fehler in der Erhebung der Messdaten?

- Ist das Messgerät korrekt geeicht?
- Liegt die Messung von Werten außerhalb des Messbereiches vom Gerät oder außerhalb der Nachweisgrenze einer chemischen Analyse?
- Liegt eine saubere Durchführung eines Experimentes vor, die zum Beispiel das Überprüfen der Reinheit von Kulturen und Substanzen einschließt?
- Können Scheineffekte (Artefakte) ausgeschlossen werden?

2.: Liegen die Abweichungen aufgrund von einer Anwendung eines wenig geeigneten Modells vor?

Eine Güte, ob die Messdaten korrekt gemessen sind bzw. ob ein Modell den Sachverhalt passend beschreibt, stellt das Ausmaß der Abweichung zwischen den Messdaten und den durch das Modell berechneten Daten dar. Beispielhaft gesagt, wenn bei einem Algenwachstumsexperiment bei Zugabe von 2  $\mu\text{mol/l}$  Phosphor als Nährstoff nach dem Wachstumsmodell ein Zuwachs an Algenbiomasse von 2 mg/l zu erwarten ist, der reale Zuwachs aber nur um 1mg/l ist, ergibt sich eine Abweichung von 50%. Bei komplexen Zusammenhängen sind umfassendere mathematische Berechnungen zur Abweichung von Messdaten vom Modell notwendig, die im nachfolgenden Kapitel 3 für lineare und ausgewählte nichtlineare Kurven abgehandelt werden. Neben der Güte der Übereinstimmung zwischen Modell und Messdaten (Kurvenanpassung) können mit den Modellen auch Parameter (Größen) berechnet werden, die für eine weitere Auswertung wichtig sind. So wird es nicht ausreichend sein, zu wissen, dass bei dem oben genannten Beispiel 2 mg/l Biomasse beim Wachstumsversuch gebildet werden. Es ist vielmehr interessant zu wissen, „wie schnell“, d.h. über welchen Zeitraum die 2 mg/l Biomassezuwachs erfolgen. Wenn beispielsweise 2mg/l Zuwachs innerhalb von 24 Stunden erfolgen, wird angezeigt, dass die Alge schnell wächst, optimale Wachstumsbedingungen vorfindet und effizient diese Bedingungen nutzen kann. Braucht eine Kultur für denselben Biomassezuwachs dagegen 2 Tag ist diese mit ihrem Wachstum weniger effizient. Die mathematische Beschreibung für diesen Sachverhalt ist eine Rate, d.h., die Menge an Zuwachs pro Zeit (Änderung der Biomasse pro Zeit). So beträgt die Wachstumsrate der effizienten Nutzung im ersten Beispiel 2 mg/l pro Tag und für die zweite ineffiziente Nutzung 1mg/l pro Tag. Diese Rate kann nicht „direkt“ gemessen sondern nur mathematisch

hergeleitet werden. Solche Raten sind jedoch wichtig zu berechnen, da damit Ursachen eines effizienteren Wachstums herausgefunden werden können. Der Unterschied in der Wachstumsrate könnte beispielweise von unterschiedlichen Temperatur-, pH-Wert- oder Lichtbedingungen usw. bewirkt worden sein. Aus der Beschreibung dieses einfachen Sachverhaltes wird deutlich, dass es wichtig ist abgeleitete Größen wie die Wachstumsrate zu berechnen. Solche mathematisch hergeleiteten Größen werden für Sinusschwingungen und exponentielle Funktionen beispielhaft für Jahresverläufe der Wassertemperatur und die Abnahme der Lichtintensität mit der Wassertiefe gezeigt. Diese Größen werden nicht, wie oben genannt zu Wachstumsbedingungen (Temperatur, pH-Wert, Licht), sondern zu dem regionalen Wetter, dem Klima und der Algenmassenentwicklung in Beziehung gesetzt (Kapitel 4).

Sämtliche Daten, die ich für meine Berechnungen verwende, beziehen sich auf den Mondsee. Der Mondsee liegt im Salzkammergut bei Mondsee, ca. 30 km entfernt von Salzburg. Dieser alpine See ist an der tiefsten Stelle 60 m tief und von der Wasserqualität als nährstoffarm bis schwach-nährstoffreich einzustufen (oligo- bis mesotroph). Der Attersee und Traunsee sind benachbarte Seen. Der Attersee ist nährstoffärmer (oligotroph) als der Mondsee und wird daher als Leitsee betrachtet (Referenzsee der Salzkammergutseen) und wird deshalb im Vergleich mit den anderen Seen des Salzkammergutes als sehr ursprünglich angesehen. Der Traunsee ist mit 191 m Tiefe und 2302 Millionen m<sup>3</sup> der tiefste und zugleich auch der größte See in Österreich.

Der Mondsee, allerdings, zählt zu den Seen des Salzkammergutes, die am intensivsten in den letzten 20 Jahren untersucht wurden. Das Interesse liegt zum einen in der touristischen Bedeutung dieses Sees für Oberösterreich (angewandte Forschung). Zum anderen dient der Mondsee als Modellsee in der Grundlagenforschung zu alpinen Seen. So liefen in den vergangenen 20 Jahren zahlreiche Untersuchungen sowohl am Institut für Limnologie der Österreichischen Wissenschaften der Akademie als auch dem Bundesinstitut für Seenforschung und Binnenfischerei in Scharfling. Die Auswahl der Datenreihen für meine Fachbereichsarbeit wurden von beiden Instituten bereitgestellt, auch wenn sie im wesentlichen vom Institut für Limnologie kommen. Limnologie ist die Wissenschaft der Binnengewässer und umfaßt die Physik, die Chemie und die Biologie von den Seen, den Flüssen und dem Grundwasser.

### 3. Methode: mathematische Anpassung der Kurvenmodelle

#### 3.1. Theorie der Kurvenanpassung mit der Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate

Die lineare Kurvenanpassung mit der Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate nach Lothar Papula (2001) im Kapitel 3.1.1. stellt die wesentliche Grundlage für die mathematische Herleitung der nachfolgend beschriebenen nichtlinearen Kurvenanpassungen dar und soll damit zuerst ausführlicher beschrieben werden. Die lineare Kurvenanpassung wird anhand der einfachsten polynomischen Funktion  $f(t) = a_0 + a_1 \cdot t$  (allgemeine Geradengleichung;  $a_0$  drückt den Wert der Verschiebung auf der y-Achse und  $a_1$  ist die Steigung der Geraden) veranschaulicht, woraus weitere Berechnungen für nichtlineare Kurvenanpassungen im Kapitel 3.1.2. abgeleitet werden.

##### 3.1.1. Lineare Kurvenanpassung

Die Aufgabe der linearen Kurvenanpassung besteht darin die Koeffizienten  $a_0$  und  $a_1$  einer vorgegebenen Funktion  $f(t) = a_0 + a_1 \cdot t$  so zu bestimmen, dass die Kurve den Messdaten bestmöglich folgt, d. h., dass die Summe  $S$  der Quadrate der Abweichungen der Messwerte  $y_i$  von den Funktionswerten  $f(t_i) = a_0 + a_1 \cdot t_i$ ,

$$S(a_0, a_1) = (y_1 - (a_0 + a_1 \cdot t_1))^2 + (y_2 - (a_0 + a_1 \cdot t_2))^2 + \dots + (y_n - (a_0 + a_1 \cdot t_n))^2,$$

minimal wird (Abb. 1).

$$S(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^n (y_i - (a_0 + a_1 \cdot t_i))^2 \rightarrow \min$$

Um das gesuchte Minimum bezüglich  $a_0$  und  $a_1$  zu finden, muss die Summe  $S$  nach  $a_0$  und  $a_1$  abgeleitet und 0 gesetzt werden. Da es sich hier um eine Funktion von zwei Variablen

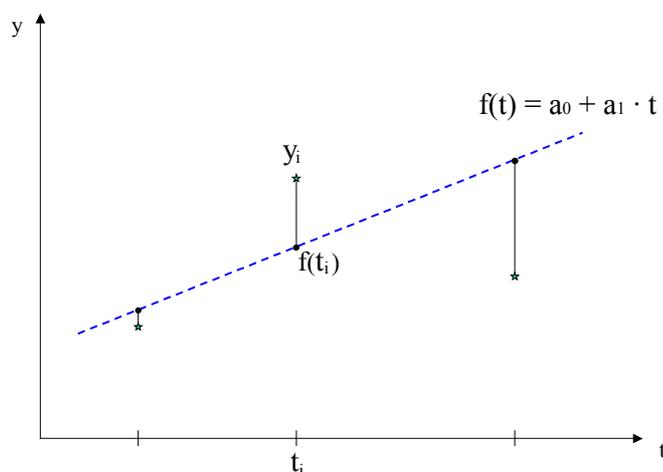


Abb. 1: 3 fiktive Messwerte (Sternchen) und die dazugehörigen Funktionswerte auf der Geraden (Punkte). Die Abstände zwischen Sternchen und Punkten sollen möglichst klein werden, um eine möglichst gut angepasste Funktion zu erhalten.

handelt, wird eine davon als eine Konstante angesehen, während nach der anderen abgeleitet wird. Dieses Verfahren bezeichnet man als partielle Differentiation. Im Unterschied zur gewöhnlichen Ableitung benutzt man hier das Symbol  $\partial$ . Die Variable, die man konstant gesetzt hat, fügt man als Index an.

$$S(a_0, a_1) = (y_1 - (a_0 + a_1 \cdot t_1))^2 + (y_2 - (a_0 + a_1 \cdot t_2))^2 + \dots + (y_n - (a_0 + a_1 \cdot t_n))^2$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial S}{\partial a_0} \right)_{a_1} &= 2 \cdot (y_1 - (a_0 + a_1 \cdot t_1)) \cdot (-1) + 2 \cdot (y_2 - (a_0 + a_1 \cdot t_2)) \cdot (-1) + \dots + 2 \cdot (y_n - (a_0 + a_1 \cdot t_n)) \cdot (-1) \\ &= \sum_{i=1}^n 2 \cdot (y_i - (a_0 + a_1 \cdot t_i)) \cdot (-1) \end{aligned}$$

Durch Umformen gelangt man zu folgender Summendarstellung:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial S}{\partial a_0} \right)_{a_1} &= 2 \cdot (y_1 - (a_0 + a_1 \cdot t_1)) \cdot (-1) + 2 \cdot (y_2 - (a_0 + a_1 \cdot t_2)) \cdot (-1) + \dots + 2 \cdot (y_n - (a_0 + a_1 \cdot t_n)) \cdot (-1) \\ &= -2 \cdot y_1 + 2 \cdot a_0 + 2 \cdot a_1 \cdot t_1 - 2 \cdot y_2 + 2 \cdot a_0 + 2 \cdot a_1 \cdot t_2 - \dots - 2 \cdot y_n + 2 \cdot a_0 + 2 \cdot a_1 \cdot t_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-2 \cdot y_i) + 2 \cdot n \cdot a_0 + \sum_{i=1}^n (2 \cdot a_1 \cdot t_i) = -2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i) + 2 \cdot n \cdot a_0 + 2 \cdot a_1 \cdot \sum_{i=1}^n (t_i) \end{aligned}$$

Als nächsten Schritt setze ich diese Ableitung 0, um den Extremwert (Minimum) zu erhalten.

$$\left( \frac{\partial S}{\partial a_0} \right)_{a_1} = -2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i) + 2 \cdot n \cdot a_0 + 2 \cdot a_1 \cdot \sum_{i=1}^n (t_i) = 0$$

$$2 \cdot n \cdot a_0 + 2 \cdot a_1 \cdot \sum_{i=1}^n (t_i) = 2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i)$$

$$a_0 \cdot n + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n (t_i) = \sum_{i=1}^n (y_i)$$

Die Ableitung nach  $a_1$  ergibt ein ähnliches Resultat:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial S}{\partial a_1} \right)_{a_0} &= 2 \cdot (y_1 - (a_0 + a_1 \cdot t_1)) \cdot (-t_1) + 2 \cdot (y_2 - (a_0 + a_1 \cdot t_2)) \cdot (-t_2) + \dots + 2 \cdot (y_n - (a_0 + a_1 \cdot t_n)) \cdot (-t_n) \\ &= \sum_{i=1}^n 2 \cdot (y_i - (a_0 + a_1 \cdot t_i)) \cdot (-t_i) \end{aligned}$$

$$\left( \frac{\partial S}{\partial a_1} \right)_{a_0} = \sum_{i=1}^n (-2 \cdot t_i \cdot y_i) + \sum_{i=1}^n (2 \cdot t_i \cdot a_0) + \sum_{i=1}^n (2 \cdot a_1 \cdot t_i^2) = -2 \cdot \sum_{i=1}^n (t_i \cdot y_i) + 2 \cdot a_0 \cdot \sum_{i=1}^n (t_i) + 2 \cdot a_1 \cdot \sum_{i=1}^n (t_i^2)$$

$$\left( \frac{\partial S}{\partial a_1} \right)_{a_0} = -2 \cdot \sum_{i=1}^n (t_i \cdot y_i) + 2 \cdot a_0 \cdot \sum_{i=1}^n (t_i) + 2 \cdot a_1 \cdot \sum_{i=1}^n (t_i^2) = 0$$

$$a_0 \cdot \sum_{i=1}^n (t_i) + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n (t_i^2) = \sum_{i=1}^n (t_i \cdot y_i)$$

Als Resultat der beiden partiellen Ableitungen und der Nullsetzung, ergeben sich zwei lineare Gleichungen mit den beiden Unbekannten  $a_0$  und  $a_1$ . Dieses Gleichungssystem ist eindeutig lösbar. Zur Vereinfachung der weiteren Rechnungen ersetze ich die Summen in folgender Weise:

$$\begin{aligned} S_{11} &= n, & S_{12} &= \sum_{i=1}^n (t_i), & S_{13} &= \sum_{i=1}^n (y_i) \\ S_{21} &= \sum_{i=1}^n (t_i), & S_{22} &= \sum_{i=1}^n (t_i^2), & S_{23} &= \sum_{i=1}^n (t_i \cdot y_i) \end{aligned}$$

Dadurch ergibt sich folgende Darstellung des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} S_{11} \cdot a_0 + S_{12} \cdot a_1 &= S_{13} \\ S_{21} \cdot a_0 + S_{22} \cdot a_1 &= S_{23} \end{aligned}$$

Bei näherer Betrachtung fällt auf, dass  $S_{12} = S_{21}$ . Deshalb werde ich ab sofort nur noch  $S_{12}$  verwenden.

Nun forme ich die 2. Gleichung nach  $a_1$  um

$$a_1 = \frac{S_{23} - a_0 \cdot S_{12}}{S_{22}}$$

und setze das Ergebnis in die erste Gleichung ein.

$$\begin{aligned} a_0 \cdot S_{11} + \frac{S_{23} - a_0 \cdot S_{12}}{S_{22}} \cdot S_{12} &= S_{13} \\ a_0 \cdot S_{11} \cdot S_{22} + (S_{23} - a_0 \cdot S_{12}) \cdot S_{12} &= S_{13} \cdot S_{22} \\ a_0 \cdot S_{11} \cdot S_{22} + S_{23} \cdot S_{12} - a_0 \cdot S_{12}^2 &= S_{13} \cdot S_{22} \\ a_0 \cdot (S_{11} \cdot S_{22} - S_{12}^2) &= S_{13} \cdot S_{22} - S_{23} \cdot S_{12} \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{S_{13} \cdot S_{22} - S_{23} \cdot S_{12}}{S_{11} \cdot S_{22} - S_{12}^2}$$

Durch das Einsetzen von  $a_0$  in die 2. Gleichung erhalte ich die Lösung für  $a_1$ .

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{S_{23} - \left( \frac{S_{13} \cdot S_{22} - S_{23} \cdot S_{12}}{S_{11} \cdot S_{22} - S_{12}^2} \right) \cdot S_{12}}{S_{22}} \\ a_1 &= \frac{S_{23}}{S_{22}} - \left( \frac{S_{13} \cdot S_{22} - S_{23} \cdot S_{12}}{S_{11} \cdot S_{22} - S_{12}^2} \right) \cdot \frac{S_{12}}{S_{22}} \\ a_1 &= \frac{S_{23} \cdot (S_{11} \cdot S_{22} - S_{12}^2) - S_{12} \cdot (S_{13} \cdot S_{22} - S_{23} \cdot S_{12})}{S_{22} \cdot (S_{11} \cdot S_{22} - S_{12}^2)} \\ a_1 &= \frac{S_{11} \cdot S_{22} \cdot S_{23} - S_{12}^2 \cdot S_{23} - S_{12} \cdot S_{13} \cdot S_{22} + S_{12}^2 \cdot S_{23}}{S_{22} \cdot (S_{11} \cdot S_{22} - S_{12}^2)} \\ a_1 &= \frac{S_{22} \cdot (S_{11} \cdot S_{23} - S_{12} \cdot S_{13})}{S_{22} \cdot (S_{11} \cdot S_{22} - S_{12}^2)} \\ a_1 &= \frac{S_{11} \cdot S_{23} - S_{12} \cdot S_{13}}{S_{11} \cdot S_{22} - S_{12}^2} \end{aligned}$$

Somit erhält man die zwei Lösungen  $a_0 = \frac{S_{13} \cdot S_{22} - S_{12} \cdot S_{23}}{S_{11} \cdot S_{22} - S_{12}^2}$  und  $a_1 = \frac{S_{11} \cdot S_{23} - S_{12} \cdot S_{13}}{S_{11} \cdot S_{22} - S_{12}^2}$  als

die beiden gesuchten Parameter für die am besten angepasste Funktion (Gerade).

Das Verfahren der Kurvenanpassung lässt sich auch auf Polynome höherer als 1. Ordnung anwenden. Dabei ist zu beachten, dass sich bei n-ter Ordnung (n+1) Gleichungen mit der selben Anzahl von Variablen ergeben.

Diese Methode ist jedoch nicht nur auf Polynome beschränkt, sondern auch in bestimmten Fällen bei Exponentialfunktionen und trigonometrische Funktionen, die für die Beschreibung in der Natur und Technik essentiell sind, nutzbar. Das wesentliche Kriterium dafür besteht darin, dass die gesuchten Koeffizienten linear sind.

### 3.1.2. Nichtlineare Kurvenanpassungen

#### 3.1.2.1. Sinusschwingung

Nachfolgend zeige ich, wie man eine Sinusschwingung als Basis für die Kurvenanpassung verwendet. Dies benötigt man unter anderem, wenn die Messdaten einen trigonometrischen Verlauf aufweisen, so zum Beispiel ein Jahrestemperaturverlauf. Die Auswertung der realen Daten wird in Kapitel 4 ausführlich beschrieben.

Eine einfache Sinusschwingung mit einem Phasenwinkel  $\varphi$

$$f(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

lässt sich mit Hilfe der Additionstheoreme (Summensätze) der trigonometrischen Funktionen in Kosinus- und Sinusfunktionen mit gleicher Kreisfrequenz  $\omega$  ( $\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu$ ) zerlegen.

$$f(t) = A \cdot (\sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(\varphi) + \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin(\varphi))$$

$$f(t) = A \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\omega \cdot t) + A \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Mit  $a_1 = A \cdot \sin(\varphi)$  und  $a_2 = A \cdot \cos(\varphi)$  entsteht wiederum eine Funktion mit linearen Koeffizienten.

$$f(t) = a_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + a_2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Bei einer Division von  $a_1$  durch  $a_2$  ergibt sich  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{A \cdot \sin(\varphi)}{A \cdot \cos(\varphi)} = \tan(\varphi)$ , also ist

$$\varphi = \arctan \frac{a_1}{a_2} .$$

Bei dieser Division ist nicht mehr zu erkennen welche Vorzeichen die Ausgangskoeffizienten  $a_1$  und  $a_2$  haben. Die Lösung liegt immer im Bereich  $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ , obwohl dies nicht unbedingt das richtige Ergebnis ist. In der folgenden Abbildung ist zu erkennen, dass man die Lösungen in vier verschiedene Fälle ( $+a_1, +a_2$ ;  $-a_1, +a_2$ ;  $+a_1, -a_2$  und  $-a_1, -a_2$ ) unterscheiden muss.

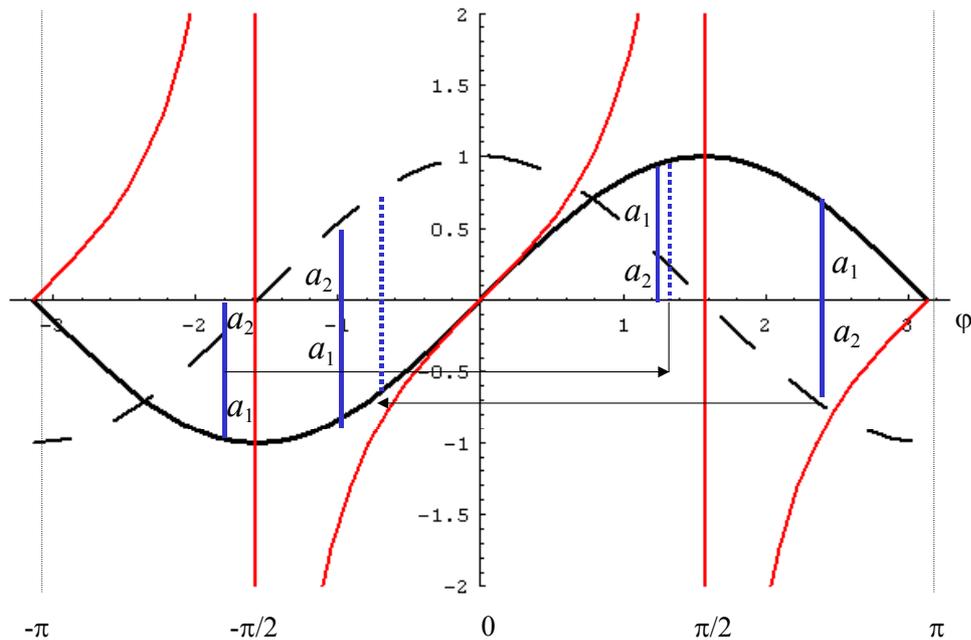


Abb. 2: 4 Fiktive Lösungen (blaue Striche), die bei einer Kurvenanpassung basierend auf einer sinusförmigen Schwingung entstehen können.

In Abb. 2 sind eine Sinusfunktion (schwarze, durchgehende Linie), eine Kosinusfunktion (schwarze, gestrichelte Linie) und eine Tangenskurve (rote Linie) dargestellt. Weiters habe ich vier fiktive Lösungen gewählt, deren  $\varphi$ -Werte durch die blauen Hilfsgeraden markiert sind. Die zwei gestrichelten blauen Linien deuten an, an welcher Position sich die dazugehörigen Lösungen befinden würden, wenn man nicht die Vorzeichen in entsprechender Weise berücksichtigt. Dabei ist es entscheidend, ob  $a_2$  einen positiven oder einen negativen Wert annimmt. Wenn  $a_2 < 0$ , dann muss  $\pi$  dazu addiert werden, um das wirkliche  $\varphi$  zu erhalten.

Dies lässt sich in folgender Form darstellen:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{a_1}{a_2}\right) - \frac{\pi}{2} \cdot (\operatorname{sgn}(a_2) - 1).$$

Die Signumsfunktion  $\operatorname{sgn}$  gibt das Vorzeichen einer Zahl an. Es gilt:

$$\operatorname{sgn}(z) = \begin{cases} +1 & \text{für } z > 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \\ -1 & \text{für } z < 0 \end{cases}$$

Das bedeutet in diesem Fall, dass die Phasenverschiebung für positive  $a_2$  wegfällt und für negative  $a_2$  den Wert  $\pi$  annimmt. Nimmt  $a_2$  den Wert 0 an, dann ist  $\frac{a_1}{a_2} = \pm\infty$ , woraus folgt,

dass  $\varphi = \arctan(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$ . Dieser Sonderfall kann nicht durch die obige Formel ausgedrückt und müsste daher extra behandelt werden.

Aus  $a_1^2 + a_2^2 = A^2 \cdot \sin^2(\varphi) + A^2 \cdot \cos^2(\varphi) = A^2 \cdot (\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) = A^2$  folgt

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Somit ergibt sich die nachstehende Lösungsfunktion:

$$f(t) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \arctan\left(\frac{a_1}{a_2}\right) - \frac{\pi}{2} \cdot (\operatorname{sgn}(a_2) - 1)\right)$$

Die Kurvenanpassung erfolgt nach dem gleichen Prinzip wie in Kapitel 3.1.1..

$$S(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^n (y_i - (a_0 + a_1 \cdot t_i))^2 \rightarrow \min$$

Nur in diesem Fall sind die gesuchten Koeffizienten nicht  $a_0$  und  $a_1$ , sondern  $a_1$  und  $a_2$ .

Die Summe der Quadrate der Abweichung hat folgende Gestalt:

$$S = (y_1 - (a_1 \cdot \cos(\omega \cdot t_1) + a_2 \cdot \sin(\omega \cdot t_1)))^2 + (y_2 - (a_1 \cdot \cos(\omega \cdot t_2) + a_2 \cdot \sin(\omega \cdot t_2)))^2 + \dots + (y_n - (a_1 \cdot \cos(\omega \cdot t_n) + a_2 \cdot \sin(\omega \cdot t_n)))^2$$

oder in Summendarstellung

$$S = \sum_{i=1}^n [y_i - (a_1 \cdot \cos(\omega \cdot t_i) + a_2 \cdot \sin(\omega \cdot t_i))]^2$$

Ableitung nach  $a_1$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S}{\partial a_1}\right)_{a_2} &= 2[y_1 - a_1 \cdot \cos(\omega \cdot t_1) - a_2 \cdot \sin(\omega \cdot t_1)](-\cos(\omega \cdot t_1)) + \\ &+ 2[y_2 - a_1 \cdot \cos(\omega \cdot t_2) - a_2 \cdot \sin(\omega \cdot t_2)](-\cos(\omega \cdot t_2)) + \dots \\ &+ 2[y_n - a_1 \cdot \cos(\omega \cdot t_n) - a_2 \cdot \sin(\omega \cdot t_n)](-\cos(\omega \cdot t_n)) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial a_1}\right)_{a_2} = 2 \sum_{i=1}^n [y_i - a_1 \cdot \cos(\omega \cdot t_i) - a_2 \cdot \sin(\omega \cdot t_i)](-\cos(\omega \cdot t_i))$$

Bei Nullsetzung und weiterer Umformung ergibt sich folgendes:

$$\begin{aligned} 0 &= (-y_1 \cdot \cos(\omega \cdot t_1) - y_2 \cdot \cos(\omega \cdot t_2) - \dots - y_n \cdot \cos(\omega \cdot t_n)) + \\ &(a_1 \cdot \cos^2(\omega \cdot t_1) + a_1 \cdot \cos^2(\omega \cdot t_2) + \dots + a_1 \cdot \cos^2(\omega \cdot t_n)) + \\ &(a_2 \cdot \sin(\omega \cdot t_1) \cdot \cos(\omega \cdot t_1) + a_2 \cdot \sin(\omega \cdot t_2) \cdot \cos(\omega \cdot t_2) + \dots + a_2 \cdot \sin(\omega \cdot t_n) \cdot \cos(\omega \cdot t_n)) \end{aligned}$$

$$= -\sum_{i=1}^n y_i \cdot \cos(\omega \cdot t_i) + \sum_{i=1}^n a_1 \cdot \cos^2(\omega \cdot t_i) + \sum_{i=1}^n a_2 \cdot \sin(\omega \cdot t_i) \cdot \cos(\omega \cdot t_i)$$

$$a_1 \cdot \sum_{i=1}^n \cos^2(\omega \cdot t_i) + a_2 \cdot \sum_{i=1}^n \sin(\omega \cdot t_i) \cdot \cos(\omega \cdot t_i) = \sum_{i=1}^n y_i \cdot \cos(\omega \cdot t_i)$$

Wenn man jetzt  $a_1$  konstant setzt, gelangt man durch partielle Ableitung nach  $a_2$ ,

Nullsetzung dieses Ausdrucks und Umformungen zum Ergebnis

$$a_1 \cdot \sum_{i=1}^n \sin(\omega \cdot t_i) \cdot \cos(\omega \cdot t_i) + a_2 \cdot \sum_{i=1}^n \sin^2(\omega \cdot t_i) = \sum_{i=1}^n y_i \cdot \sin(\omega \cdot t_i).$$

Mit

$$S_{11} = \sum_{i=1}^n \cos^2(\omega \cdot t_i), \quad S_{12} = \sum_{i=1}^n \sin(\omega \cdot t_i) \cdot \cos(\omega \cdot t_i), \quad S_{13} = \sum_{i=1}^n y_i \cdot \cos(\omega \cdot t_i)$$

$$S_{21} = \sum_{i=1}^n \sin(\omega \cdot t_i) \cdot \cos(\omega \cdot t_i), \quad S_{22} = \sum_{i=1}^n \sin^2(\omega \cdot t_i), \quad S_{23} = \sum_{i=1}^n y_i \cdot \sin(\omega \cdot t_i)$$

erhält man ein Gleichungssystem von 2 linearen Gleichungen mit 2 Variablen, deren Lösung bereits in Kapitel 3.1.1 berechnet wurde.

Prinzipiell hat man die Möglichkeit eine konstante Verschiebung der Sinusfunktion in y-Richtung durch eine 3. Unbekannte  $a_0$  zu erreichen.

$$f(t) = a_0 + a_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + a_2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Da  $a_0$  nichts anderes ist als der Mittelwert, kann man diesen auch vorher bestimmen und von den gemessenen Daten subtrahieren. Letzteres werde ich in meinen Auswertungen anwenden. Um eine noch bessere Kurvenfittung zu erhalten, kann man auch das  $\omega$  als eine Variable betrachten. Dadurch würde aber ein nicht lineares Gleichungssystem entstehen, welches keine eindeutige Lösung mehr hat.

$$S = \sum_{i=1}^n [y_i - (a_1 \cdot \cos(\omega \cdot t_i) + a_2 \cdot \sin(\omega \cdot t_i))]^2$$

$$\left( \frac{\partial S}{\partial \omega} \right)_{a_1, a_2} = 2[y_1 - a_1 \cdot \cos(\omega \cdot t_1) - a_2 \cdot \sin(\omega \cdot t_1)](a_1 \cdot t_1 \cdot \sin(\omega \cdot t_1) - a_2 \cdot t_1 \cdot \cos(\omega \cdot t_1)) +$$

$$+ 2[y_2 - a_1 \cdot \cos(\omega \cdot t_2) - a_2 \cdot \sin(\omega \cdot t_2)](a_1 \cdot t_2 \cdot \sin(\omega \cdot t_2) - a_2 \cdot t_2 \cdot \cos(\omega \cdot t_2)) + \dots$$

$$+ 2[y_n - a_1 \cdot \cos(\omega \cdot t_n) - a_2 \cdot \sin(\omega \cdot t_n)](a_1 \cdot t_n \cdot \sin(\omega \cdot t_n) - a_2 \cdot t_n \cdot \cos(\omega \cdot t_n))$$

$$\left( \frac{\partial S}{\partial \omega} \right)_{a_1, a_2} = 2 \sum_{i=1}^n [y_i - a_1 \cdot \cos(\omega \cdot t_i) - a_2 \cdot \sin(\omega \cdot t_i)](a_1 \cdot t_i \cdot \sin(\omega \cdot t_i) - a_2 \cdot t_i \cdot \cos(\omega \cdot t_i))$$

Nun ist deutlich zu erkennen, dass die Variable  $\omega$  nicht linear auftritt, sondern nur in Funktionen vorkommt, wodurch sie beim Ableiten immer erhalten bleiben würde. Es ergeben sich

bei  $\left( \frac{\partial S}{\partial \omega} \right)_{a_1, a_2} = 0$  mehrere Lösungen.

### 3.1.2.2. Exponentialfunktion

Exponentialfunktionen spielen in der Biologie sowie in der Physik eine entscheidende Rolle. Mit ihrer Hilfe lassen sich Wachstum- und Zerfallsprozesse, wie zum Beispiel Wachstum von Organismen, Lichtabnahme, Radioaktiver Zerfall und andere Extinktionsabläufe, beschreiben. Auch wir Menschen vermehren uns exponentiell. Aus der Vielfalt der Prozesse, die durch exponentielle Funktionen beschrieben werden können, kommt dieser nichtlinearen Funktion eine große Bedeutung zu. Im Kapitel 4 wird die exponentielle Lichtabnahme im Mondsee berechnet und in Beziehung zur Trübe des Wasserkörpers gestellt. Die Euler'sche Zahl  $e$  wird als die Basis für alle Wachstums- und Zerfallsprozesse verwendet.

Die allgemeine Form einer Exponentialfunktion besitzt folgendes Aussehen:

$$g(t) = y_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

Logarithmiert man diese Funktion,  $\ln \frac{g(t)}{y_0} = \ln e^{\lambda \cdot t}$  bzw.  $\ln g(t) - \ln y_0 = \lambda \cdot t$ , so erhält man

$\ln g(t) = \ln y_0 + \lambda \cdot t$ . Wenn man jetzt  $\ln g(t)$  durch  $f(t)$ , sowie  $\ln y_0$  durch  $a_0$  und  $\lambda$  durch  $a_1$ , ersetzt, gelangt man zu der Funktion  $f(t) = a_0 + a_1 \cdot t$ . Nun wird deutlich, dass diese Kurvenanpassung wieder eine ähnliche Form wie die lineare Kurvenanpassung in Kapitel 3.1.1. annimmt.

Die Summe der Quadrate der Abstände von Messwerten  $y_i$  und Funktionswerten  $g(t_i)$  bzw.  $\ln y_i$  und  $\ln g(t_i)$  soll wiederum minimal werden. Sie hat in diesem Fall folgende Form:

$$S = [\ln y_1 - (a_0 + a_1 \cdot t_1)]^2 + [\ln y_2 - (a_0 + a_1 \cdot t_2)]^2 + \dots + [\ln y_n - (a_0 + a_1 \cdot t_n)]^2$$

$$S = \sum_{i=1}^n [\ln y_i - (a_0 + a_1 \cdot t_i)]^2$$

In den Summen ( $S_{11}$ - $S_{23}$ ) werden lediglich die  $y_i$  durch  $\ln y_i$  ersetzt.

$$S_{11} = n, \quad S_{12} = \sum_{i=1}^n (t_i), \quad S_{13} = \sum_{i=1}^n (\ln y_i)$$

$$S_{21} = \sum_{i=1}^n (t_i), \quad S_{22} = \sum_{i=1}^n (t_i^2), \quad S_{23} = \sum_{i=1}^n (t_i \cdot \ln y_i)$$

Mit den Lösungen  $a_0$  und  $a_1$  des Gleichungssystems kann man die gesuchte Exponentialfunktion wie folgt darstellen:

$$g(t) = e^{a_0} \cdot e^{a_1 \cdot t} = e^{(a_0 + a_1 \cdot t)}$$

### 3.1.2.3. Weitere nichtlineare Funktionen

Neben der oben vorgestellten Sinus- und Exponentialfunktion sind beispielhaft zwei weitere nichtlineare Kurven kurz vorgestellt, auf die aber im Detail nicht weiter eingegangen wird.

$$f(t) = a_0 + a_1 \cdot e^{\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t-a_2}{a_3}\right)^2\right)} \quad \rightarrow \text{Gaußsche Glockenkurve}$$

$$f(t) = \frac{a_1 \cdot t^2}{1 + a_2 \cdot t}$$

## 3.2. Weitere Möglichkeiten zur Verbesserung der Kurvenanpassung

Bei den bisherigen Beispielen besaß jeder Messpunkt, egal wie groß der Abstand zur gesuchten Funktion ist, das gleiche Gewicht bei der Anpassung der Parameter. Das heißt, dass fehlerhafte, zu weit entfernte Daten die Lage der Kurve verfälschen können. Um das zu Vermeiden werden die Quadrate der Abstände gewichtet.

$$S = \sum_{i=1}^n w_i (y_i - f(t_i))^2$$

Mit  $w_i$  erhält jeder Abstand ein eigenes Gewicht, welches mit der Entfernung abnimmt. Somit spielen sogenannte „Datenausreißer“ keine so dominierende Rolle mehr. In Abb. 3 ist ein Beispiel dafür dargestellt.

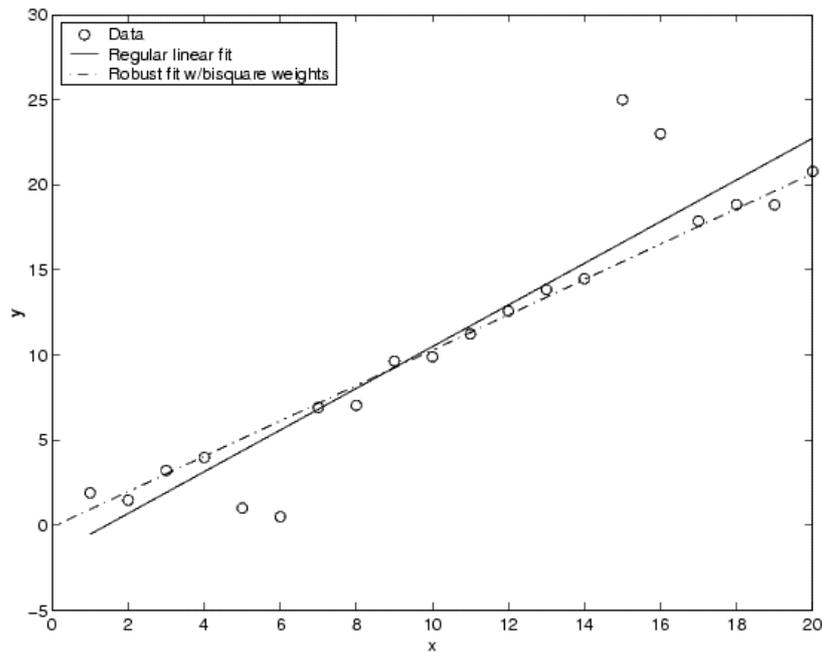


Abb. 3: Eine Regressionsgerade ohne Gewichte (durchgehend) im Gegensatz zu einer Regressionsgeraden mit Gewichten (gestrichelt).

### 3.3. Gütemaß der Kurvenanpassung

Mit der Formel 
$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - f(t_i))^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

nach [www.slcontrol.com/Interface/Fit\\_control.html](http://www.slcontrol.com/Interface/Fit_control.html) (23. 11. 2004) wird beschrieben, wie gut die gefittete Kurve die realen Messwerte anpasst.  $\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i$  ist der Mittelwert.

Wenn alle  $f(t_i)$  exakt den  $y_i$  entsprechen, heißt das, dass die Funktion durch alle Messpunkte läuft und das Bestimmtheitsmaß  $R^2$  somit den Wert 1 annimmt. Ist die Güte schlechter, sinkt  $R^2$  auf einen Wert, der kleiner ist als 1.

## 4. Anwendung der Kurvenanpassung in der Gewässerökologie

Die Gewässerökologie (Limnologie) ist wie bereits in der Einleitung erwähnt, eine interdisziplinäre Wissenschaft. Die Anwendung der mathematischen Kurvenanpassung für Jahresverläufe der Wassertemperaturen (Kapitel 4.1.) und Profile der Lichtabnahme im Wasserkörper (Kapitel 4.2.) stellen einen kleinen Ausschnitt aus der limnologischen Forschung vor. Prinzipiell finden die hier beschriebenen Fragestellung der Limnologie auch in der Ozeanographie Anwendung.

### 4.1. Mehrjähriger Verlauf der Wassertemperatur - eine trigonometrische Funktion

Im nachfolgenden Beispiel werde ich den ganzjährigen Temperaturverlauf aus dem Jahr 1978 bearbeiten. Es wurden dabei für jeden Tag die Wassertemperaturen des gesamten Wasserkörpers vom Mondsee gemittelt (MWT - mittlere Wassertemperatur). Alle dafür benötigten Rechnungen habe ich in Excel durchgeführt.

Da der Temperatur über das Jahr hinweg einen sinusförmigen Verlauf nimmt, ist es am besten eine lineare Anpassung mit trigonometrischen Funktionen zu verwenden.

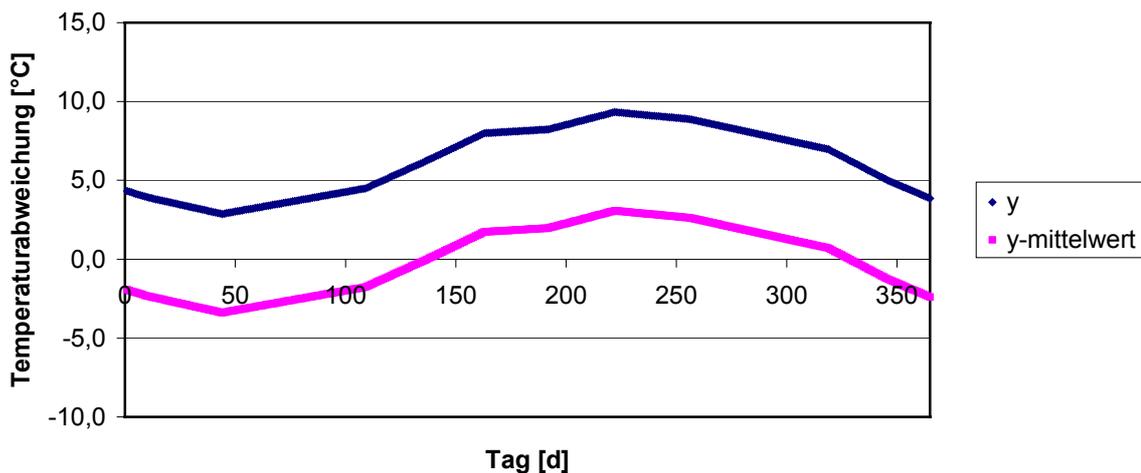


Abb. 4: Reale Messwerte (obere Kurve) vom Mondsee aus dem Jahr 1978 und den für die Anpassung verwendete unteren Datenverlauf, bei dem der Mittelwert (rund 6,3 K) subtrahiert wurde.

Die Darstellung der Daten in Abb. 4 soll veranschaulichen, dass die neuen Temperaturwerte (untere Kurve) nun die x-Achse schneidet und man somit die Nullstellen, die zugleich auch die Wendepunkte sind, berechnen kann. Diese Maßnahme dient einzig und allein als Hilfe für die Berechnung der Kurvenanpassung. Somit ist es auch nicht verwunderlich, dass die neuen durchschnittlichen Wassertemperaturen des gesamten Mondsees am Anfang und am Ende des Jahres negativ sind. Wenn man später den wirklichen y-Wert berechnen will, so muss man nur den Mittelwert wieder dazu addieren.

### 4.1.1. Beschreibung der mathematischen Auswertung der trigonometrischen Funktion

#### 4.1.1.1. Berechnung der Kurvenparameter mittels einer Exceltabelle

Die Berechnungen der Kurvenparameter werden in Tabelle 1 dargestellt. Aus Platzgründen sind nicht alle Daten gezeigt. So befindet sich die Zeile 36 aus Tabelle 1 in der Originaltabelle eigentlich in Zeile 372.

#### Beschreibung der einzelnen Spalten:

Spalte A:	die realen Messdaten
Spalte B:	Anzahl der Tage
Spalte C:	Messdaten minus Mittelwert
Spalte D:	Summanden der Summe $S_{11}$
Spalte E:	Summanden der Summe $S_{12}/S_{21}$
Spalte F:	Summanden der Summe $S_{13}$
Spalte G:	Summanden der Summe $S_{22}$
Spalte H:	Summanden der Summe $S_{23}$
Spalte I:	die an der Stelle $t_i$ berechneten Funktionswerte $f(t_i)$
Spalte J:	die Abweichung der Messdaten minus Mittelwert von Funktionswerten
Spalte K:	das Quadrat der Abweichung (Spalte J)
Spalte L:	das Quadrat der Messdaten minus Mittelwert
Spalte M:	Klasseneinteilung für die Werte aus Spalte J
Spalte N:	Häufigkeit des Auftretens der Werte von Spalte J laut Klasseneinteilung

#### Beschreibung von einzelnen Feldern:

Feld A36:	Mittelwert der Messdaten
Feld C36:	Summe der Werte aus Spalte C (zur Kontrolle, muss 0 ergeben)
Felder D36-H36:	die Summen $S_{11}$ bis $S_{23}$
Feld K36:	Summe der Werte aus Spalte K (für $R^2$ )
Feld L36:	Summe der Werte aus Spalte L (für $R^2$ )
Feld G2:	Periodendauer $T$
Feld G3:	Kreisfrequenz $\omega$
Feld J1:	berechneter Parameter $a_1$ der angepassten Kurve
Feld J2:	berechneter Parameter $a_2$ der angepassten Kurve
Feld J3:	Bestimmtheitsmaß $R^2$
Feld L1:	berechneter Phasenwinkel $\varphi$
Feld L2:	die dem Phasenwinkel $\varphi$ entsprechende Anzahl von Tagen $t_0$
Feld L3:	Amplitude $A$

Erläuterung zu Feld L2:

$$\text{Aus } f(t) = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T}(t - t_0)\right) = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} - \frac{2 \cdot \pi \cdot t_0}{T}\right) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

ergibt sich für die Tagesanzahl  $t_0$ , die der Phasenverschiebung  $\varphi$  entspricht:

$$t_0 = -\frac{T}{2 \cdot \pi} \varphi = -\frac{\varphi}{\omega}$$

Vorgegebene Werte befinden sich lediglich in den Spalten A, B und M sowie im Feld G2. Alle anderen Felder wurden mittels Formeln berechnet. Zum Beispiel kann man durch die Eingabe einer anderen Periodendauer in Feld G2 die gesamten berechneten Werte verändern.

Begründung für die Wahl von  $T$ :

Für Abläufe in der Natur, wie zum Beispiel die Abfolge der Jahreszeiten, ist die Bewegung der Erde um die Sonne entscheidend. Die Zeitdauer einer Sonnenumrundung, das heißt von Frühlingspunkt zu Frühlingspunkt, beträgt 365,2422 Tage und wird tropisches Jahr genannt. Der Kalender wird durch bestimmte Regeln so angepasst, dass der Frühlingspunkt auf den 21. oder 20. März fällt. Das wird erreicht, indem zusätzliche Tage in bestimmten Jahren, genannt Schaltjahre, eingeschoben werden. Ansonsten würde der Frühlingspunkt in den kalendrischen Winter wandern. In Tabelle 2 ist dargestellt, wie sich der Frühlingspunkt bei einem 365-Tage Kalender und bei einem 365,25-Tage Kalender über 100 Jahre ohne Korrektur verschiebt.

Durch eine Kalenderreform von Papst Gregor XIII. wurde folgende Regel gültig:

$$\text{Jahreslänge} = 365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} = 365,2425 \text{ d}$$

Das bedeutet, dass bei allen ohne Rest durch 4 teilbaren Jahreszahlen 1 Tag eingefügt wird, bei allen durch 100 teilbaren Jahreszahlen dieses Einfügen nicht statt findet, aber doch erfolgt, wenn die Jahreszahl ganzzahlig durch 400 teilbar ist.

Tabelle 2: Vergleich zwischen einem 365-Tage-Jahr und einem Jahr mit 365,25 Tagen.

Jahre	365-Tage-Jahr	365,25-Tage-Jahr
0	21.03. 00:00 Uhr	21.03. 00:00 Uhr
4	21.03. 23:15 Uhr	20.03. 23:16 Uhr
8	22.03. 22:30 Uhr	20.03. 22:31 Uhr
12	23.03. 21:45 Uhr	20.03. 21:46 Uhr
16	24.03. 21:00 Uhr	20.03. 21:01 Uhr
20	25.03. 20:15 Uhr	20.03. 20:16 Uhr
...	...	...
92	12.04. 06:45 Uhr	20.03. 06:46 Uhr
96	13.04. 06:00 Uhr	20.03. 06:01 Uhr
100	14.04. 05:15 Uhr	20.03. 05:16 Uhr
	Astronomischer (meteorologischer) Frühling ↓	Astronomischer (meteorologischer) Frühling ↓
	<b>Kalendarischer Sommer</b>	<b>Kalendarischer Winter</b>

Für meine Auswertungen reicht es die erste Regel zu befolgen und die Jahreslänge mit 365,25 Tagen anzugeben, da von 1904 bis 2096 durchgängig alle 4 Jahre ein Schalttag eingefügt wird.

Dadurch wird nun klar, warum es bei meinen Daten keinen Sinn macht,  $T$  bzw.  $\omega$  als Variable für die Anpassung zu betrachten.

Graphische Darstellung des Ergebnisses der Anpassung:

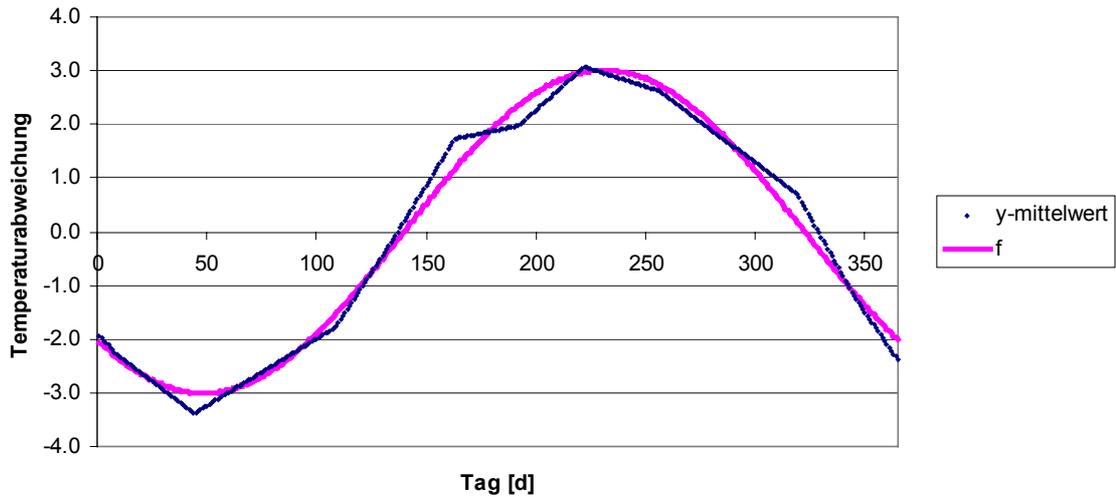


Abb. 5: Die gefittete Sinusschwingung im Vergleich zu den Messwerten (des Temperaturverlaufes aus dem Jahr 1978) minus deren Mittelwert.

Das errechnete  $R^2 = 0,9899$  und Abb. 5 zeigen, dass die ursprünglichen Daten keine all zu großen Abweichungen von der angepassten Kurve aufweisen. Abb. 6 zeigt, dass die Abweichungen nahezu normal verteilt sind. Man kann das auch als graphische Bestätigung für den hohen Wert von  $R^2$  sehen.

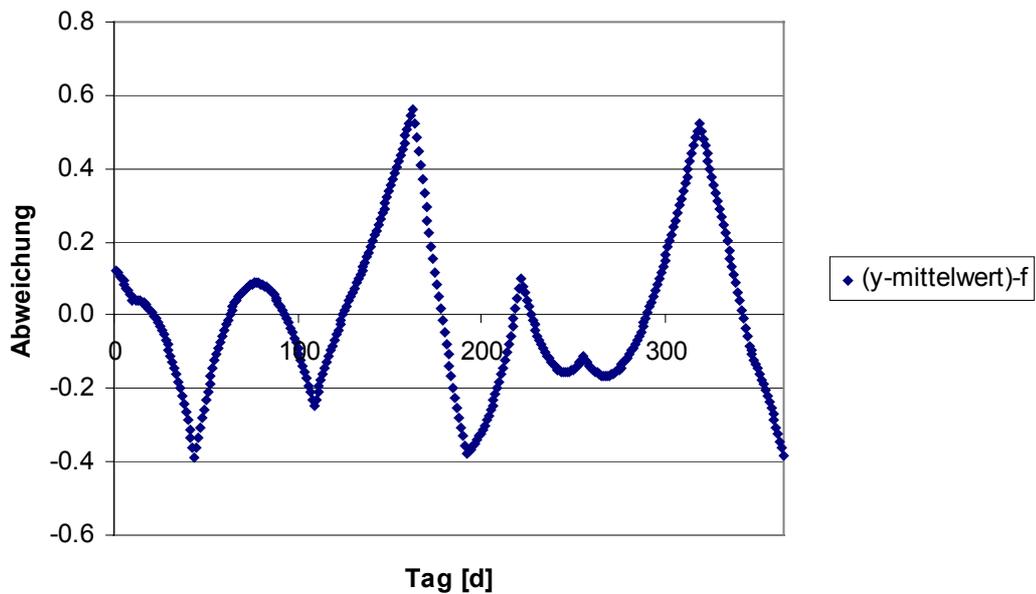


Abb. 6: Abweichung der Werte von der Fitkurve.

#### 4.1.1.2. Graphische Beschreibung in Mathematika: Warum werden Temperaturverläufe nicht mittels Polynomfunktion sondern besser über Sinusschwingungen angepasst?

Die Bestimmung bestimmter Parameter der Datenkurven und die graphische Darstellung lassen sich in Mathematica einfacher und übersichtlicher ausführen als in Excel.

Mathematica gehört zu den erfolgreichsten Programmen der Angewandten Mathematik und hat einen Stellenwert wie zum Beispiel Microsoft Word für die Text- oder Adobe Photoshop für die Bildverarbeitung. Mathematica ist besonders leistungsfähig in den Gebieten Graphik, Numerik, Statistik und Algebra. Ein besonderer Vorteil besteht darin, dass dieses Programm in der Lage ist symbolisch, also ohne konkrete Zahlenwerte, zu rechnen, was in Excel zum Beispiel nicht möglich ist.

Einerseits dient Mathematica mir zur Überprüfung der errechneten Parameter und andererseits zum Vergleich von Sinusfunktionsfitting mit einer Polynomfitting 6ten Grades.

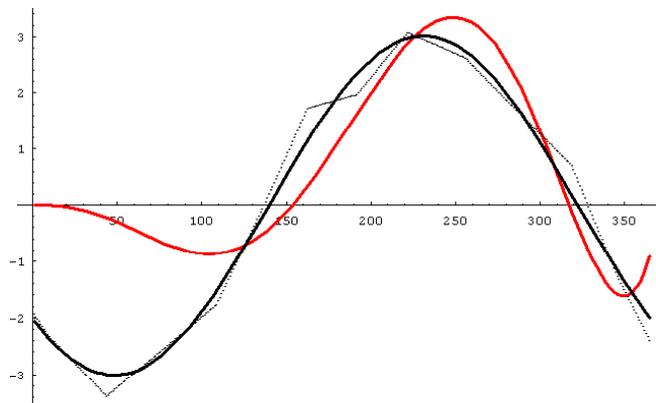


Abb. 7: Darstellung der Originalwerte (gepunktet), der angepassten Sinusschwingung (schwarz) und der gefitteten Polynomfunktion (rot).

Man sieht, dass die Polynomfunktion die Messwerte nicht repräsentiert (Abb. 7).

Wenn die t-Werte durch 10 oder durch 100 dividiert werden, ergibt sich jedoch eine relativ genaue Anpassung (Abb. 8):

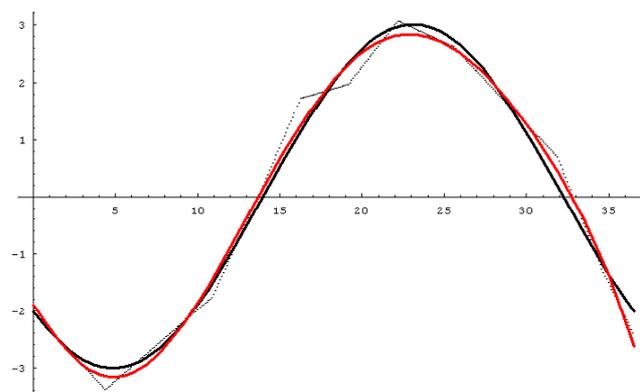


Abb. 8: Darstellung der Originalwerte (gepunktet), der angepassten Sinusschwingung (schwarz) und der gefitteten Polynomfunktion (rot) in einem Intervall von 0 bis 36,5, welches das Jahr repräsentiert.

Doch wenn man einen größeren Bereich der Funktionen betrachtet, ist es nicht zu übersehen, dass die Polynomfunktion außerhalb des Wertebereichs irgendwo verläuft und somit nicht für eine Extrapolation verwendet werden kann (Abb. 9).

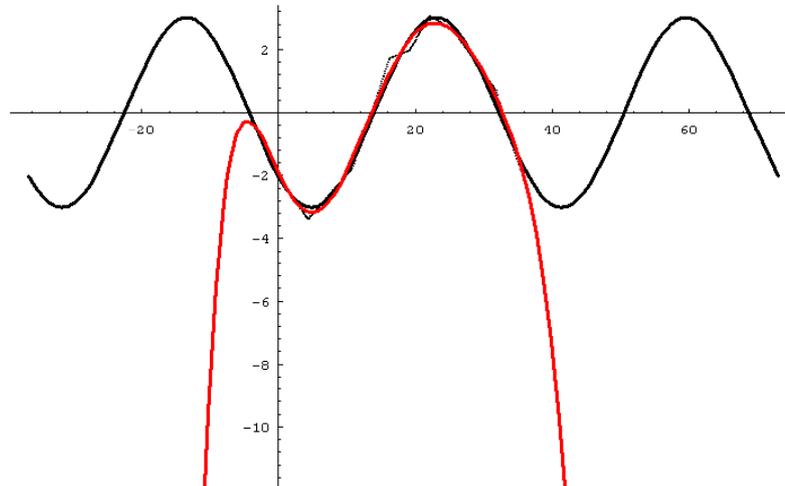


Abb. 9: Darstellung der Originalwerte (gepunktet), der angepassten Sinusschwingung (schwarz) und der gefitteten Polynomfunktion (rot) in einem größeren Intervall.

#### 4.1.2. Bewertung der Parameter der Kurvenanpassung: Abhängigkeit der Wassertemperatur vom Klima und Wetter

Die Abhängigkeit vom Klima wird häufig über den sogenannten NAO-Index nach [www.cgd.ucar.edu/~jhurrell/indices.html](http://www.cgd.ucar.edu/~jhurrell/indices.html) (10. 11. 2004) bewertet. Der North Atlantic Oscillation Index gibt die Luftdruckdifferenzen zwischen einer Wetterstation in Island und einer Station im Süden an, wie zum Beispiel Gibraltar. Diese gemessenen Werte werden oft für Vergleiche zwischen Klima und lokalem Wetter verwendet.

J. W. Hurrell hat die Abweichungen der Temperatur vom NAO-Index berechnet und somit ein langjähriges Mittel erhalten. Die Abweichungen sind jedoch auch für die einzelnen Monate berechnet worden. In Abb. 10 wird der  $NAO_{FMA}$ -Index dargestellt (gilt für die drei Monate Februar bis April). Werte, die größer als Null sind, besitzen eine positive und Werte, die kleiner als Null sind, eine negative Abweichung vom langjährigen Drei-Monatsmittel.

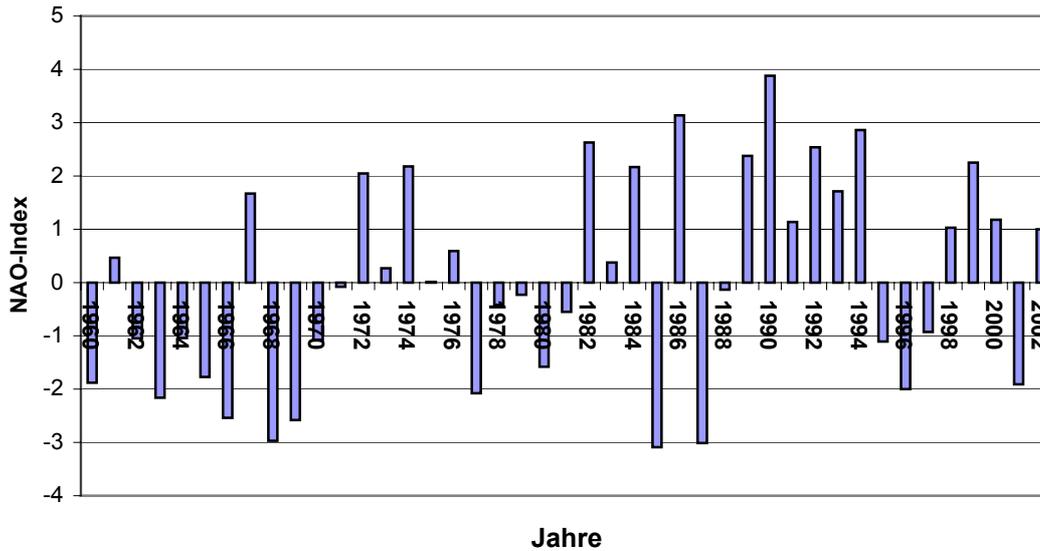


Abb. 10: NAO-Index: Abweichung vom langfristigen Drei-Monatsmittel NAO (Monate Februar, März und April) ( $NAO_{FMA}$ -Index) von 1980 bis 2003.  
(Verändert nach [www.cgd.ucar.edu/~jhurrell/indices.html](http://www.cgd.ucar.edu/~jhurrell/indices.html) (10. 11. 2004))

Anhand der Jahresmittelwerte in Abb. 11 kann man sehr gut erkennen, dass Lufttemperatur, Niederschlag und Sonneneinstrahlung des Salzkammergutes sowie der Wasserstand vom Mondsee in Beziehung zum NAO-Index stehen. In einem extrem NAO-positiven Jahr, in welchem also eine große positive Abweichung vom jährlichen NAO vorliegt, ergibt sich eine sehr hohe Lufttemperatur und sehr hohe Sonneneinstrahlung aber ein nur sehr geringer Niederschlag sowie ein sehr niedriger Wasserstand im Mondsee. Umgekehrt lassen sich extrem NAO-negative Jahre als kalte, bewölkte regnerische Jahre mit einem hohen Wasserstand im Mondsee beschreiben (positive und negative Korrelation siehe nachfolgender Text zu Bestimmtheitsmaß). Damit wird hier der Bezug zwischen dem Klima (NAO) und dem Wetter hergestellt (Lufttemperatur usw.). Im Beispiel der hier beschriebenen Temperaturverläufe wurde der  $NAO_{FMA}$ -Index verwendet, da sich die jahreszeitliche Verschiebung am besten im Frühjahr feststellen lässt.

Das Wetter im alpinen Gebiet ist sehr spezifisch, d.h. durch Fönwetterlagen geprägt. Der regionale Wetterindex nach Steinacker (2000) wird aus zehn Haupt-Strömungslagen berechnet. Dieser Steinacker-Index bezieht sich in der Fachbereichsarbeit ebenfalls auf einen Frühjahrsindex. Es wurde hier die Südwest-Wetterlage (SW) im Mai (5) ausgewählt, der den Einfluss des feuchten Südwestwindes im Monat Mai beschreibt ( $Steinacker_{SW(5)}$ ). Die beiden Indizes, NAO und Steinacker, beziehen sich damit auf das „globale“ Klima sowie das „regionale“ Wetter.

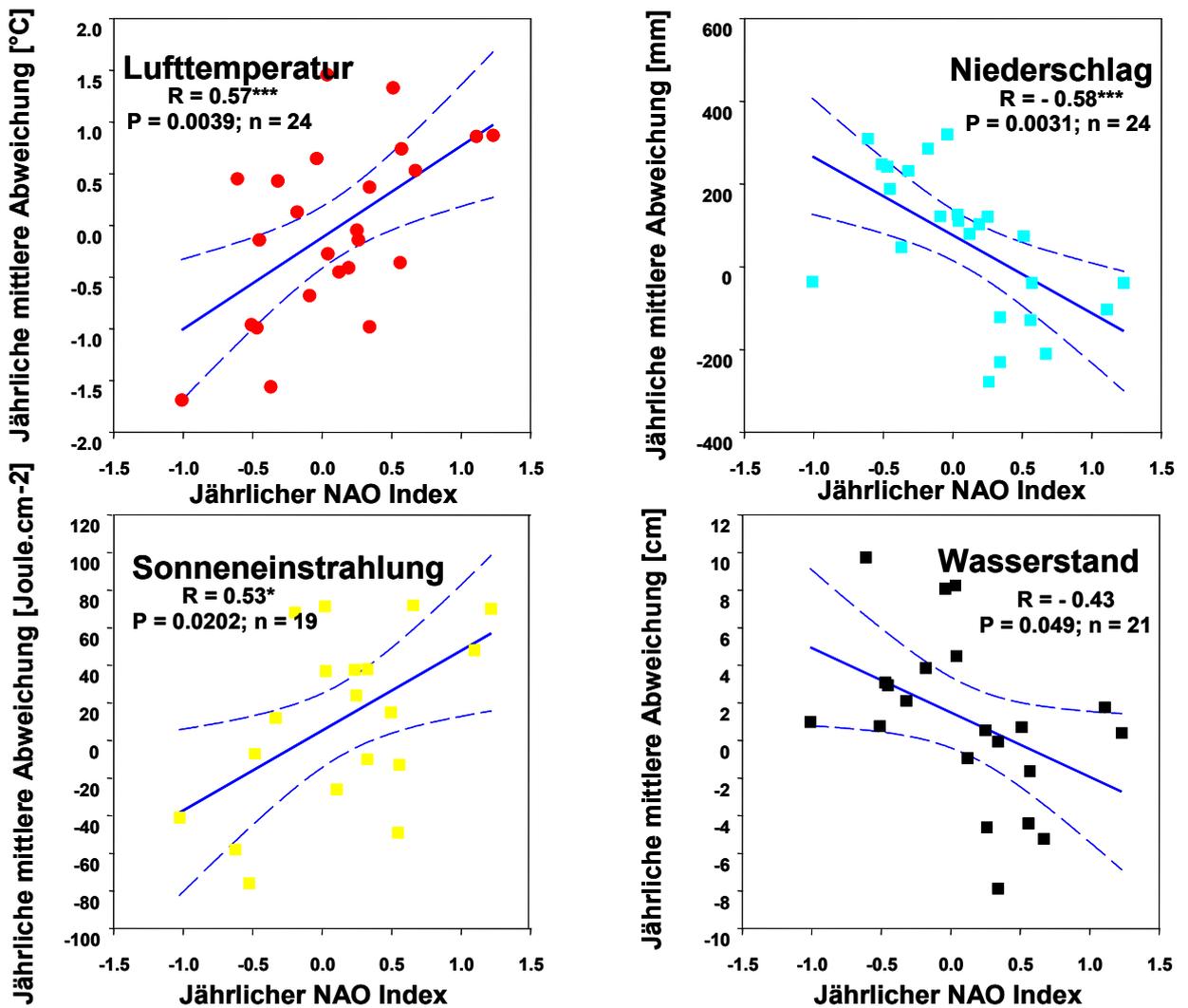


Abb. 11: Abhängigkeit der Jahresmittelwerte von der Lufttemperatur, der Sonneneinstrahlung und dem Niederschlag im Salzammergut sowie dem Wasserstand des Mondsees vom Klima (jährlicher NAO-Index) für eine Periode der letzten 19 bis 24 Jahre. Die Geraden stellen die bestmögliche Anpassung der Regression grafisch dar und werden als Regressionsgeraden bezeichnet. Die gestrichelten Linien markieren den 95%-igen Vertrauensbereich. (Grafiken verändert nach Teubner & Dokulil (2003).

Die Temperatur des Mondsee wurde zweifach bewertet. Zum einen wurde die MWT berechnet (s. Kapitel 4.1), um die Wärmespeicherkapazität des gesamten Wasserkörper in Abhängigkeit von Klima- und Wetteränderungen zu bewerten. Zum anderen wurde die Oberflächenwassertemperatur (OWT) ermittelt, um den Einfluß von Klima- und Wetteränderungen auf die Grenzschicht des Sees zur Atmosphäre zu beurteilen. Der langjährige Verlauf beider Wassertemperaturen wird in Abb. 12 gezeigt. Die Trendlinien weisen auf eine Erwärmung über die letzten 25 Jahre hin. Sie beträgt pro Dekade  $0,73^{\circ}\text{C}$  bei der OWT und  $0,22^{\circ}\text{C}$  bei der MWT.

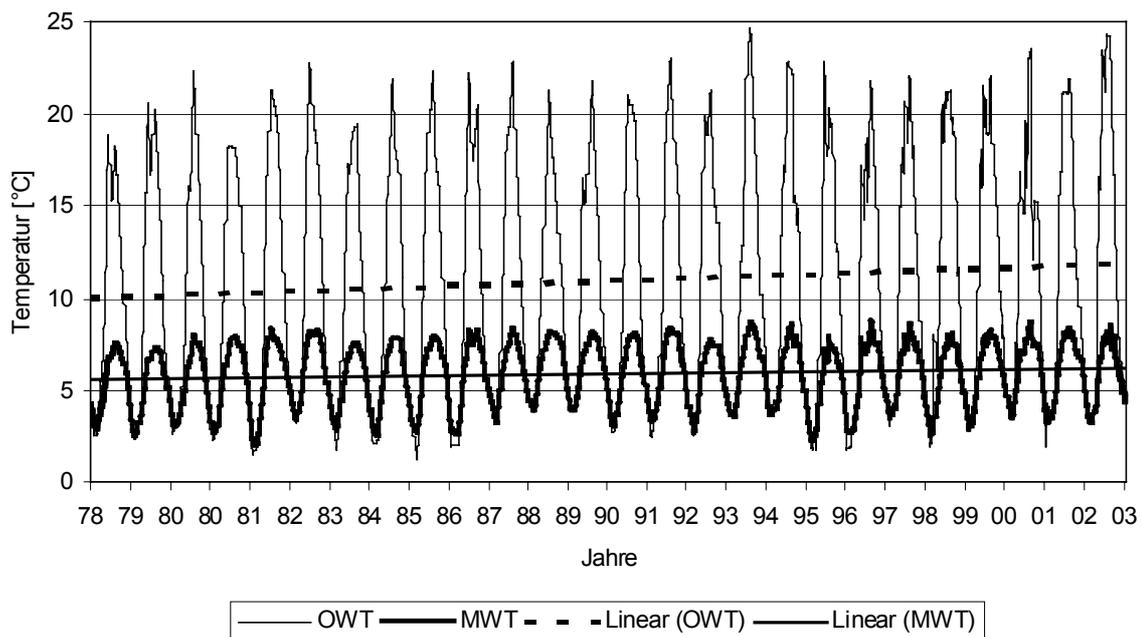


Abb. 12: Langzeitentwicklung der Wassertemperatur an der Oberfläche (OWT) und über den gesamten Wasserkörper gemittelt (MWT) im Mondsee von 1978 bis 2003. Die beiden Trendlinien zeigen eine Erwärmung im Verlauf der letzten 25 Jahre an. Weitere Erläuterung siehe Text.

Der jeweilige Tag im Jahr, an dem das Jahresmaximum der Temperatur erreicht wurde, ist in Abb. 13 A dargestellt. Diese Tage wurden mittels Umformungen aus der Phasenverschiebung  $\varphi$  der Sinusfunktion berechnet (siehe Kapitel 4.1.1.1.). Das Jahresmaximum liegt für die MWT zwischen dem 224. und dem 238. Tag, für die OWT zwischen dem 217. und dem 248. Tag, d.h. ca. zwischen Anfang August und Anfang September. Der Wert für MWT schwankt damit über eine Periode von 14 Tagen, für OWT über 31 bzw. 21\* Tage im Jahr. Damit zeigen sowohl die Ausgangsdaten in Abb. 12 als auch die berechneten Phasenverschiebungen in Abb. 13 A eine stärkere Temperaturschwankungsbreite in der oberflächennahen Schicht gegenüber dem gesamten Wasserkörper an.

Weiters lässt sich in Abb. 13 A ein Trend bei der Phasenverschiebung ablesen. Die eingefügte Trendlinie zeigt an, dass das Jahresmaximum über die letzten 25 Jahre immer zeitiger im Jahr erreicht wurde. Sie verschiebt sich pro Dekade um 2,4 Tage für MWT und 2,2 Tage für OWT (lässt man den OWT-Wert 2002 wiederum unberücksichtigt, beträgt der Trend eines früheren Jahresmaximum bei OWT um 5,4 Tage per Dekade).

Abb. 13 B zeigt den Tag des Jahresmaximums aus den Originaldaten, d.h. genau den Tag an dem tatsächlich die höchste Wassertemperatur im Jahr gemessen wurde, und die Werte nach der angepassten Kurve. Es zeigt sich deutlich, dass die Tage ermittelt nach den Originalwerten viel stärker variieren als die, welche durch die Kurvenanpassung berechnet wurden. Diese viel stärkere Schwankungsbreite der Originaldaten ergibt sich durch die Zufälligkeit einzelner Temperaturwerte.

\* Für OWT ergibt sich eine Unsicherheit für den Jahreswert 2002 in Abb. 13 A. Lässt man diesen Wert unberücksichtigt, reduziert sich die Schwankungsbreite auf 21 Tagen.

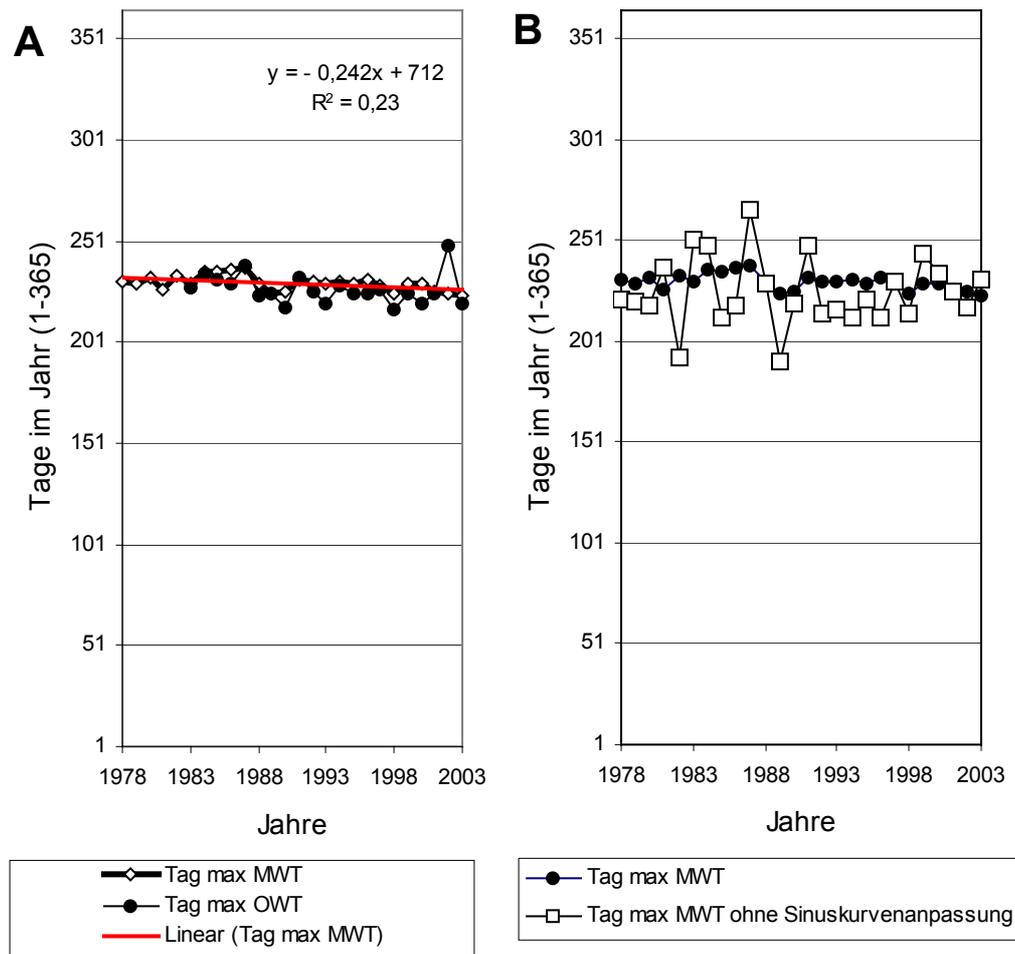


Abb. 13 (A, B): A: Zeitpunkt des Tages im Jahr, bei dem die maximale Temperatur (MWT bzw. OWT) erreicht wurde. Diese Tage wurden mittels Kurvenanpassung basierend auf einer Sinusfunktion ermittelt.

B: Zeitpunkt des Tages im Jahr, bei dem die maximale durchschnittliche Wassertemperatur (MWT) erreicht wurde. Das eine mal wurden die Werte der angepassten Sinusschwingung und das andere mal die Werte der Funktion ohne Kurvenanpassung verwendet.

In Abb. 14 wird der Effekt von Klima und Wetter auf die zeitliche Verschiebung der Jahresdynamik der Temperatur betrachtet. Das Bestimmtheitsmaß einer Korrelation, der Wert  $R^2$ , zeigt die Güte eines Zusammenhanges an (vergleiche mit Kapitel 3.3.).  $R^2$  berechnet sich aus dem Quadrat des Korrelationskoeffizienten. Beispielhaft ist in Abb. 11 der Korrelationskoeffizient angegeben, der je nach dem, ob ein direkter (positiver) oder ein indirekter (negativer) Zusammenhang besteht, ein positives oder negatives Vorzeichen besitzt. Bei einer Angabe des Bestimmtheitsmaßes, wie in Abb. 13, erklärt sich aus dem Wert an sich nicht mehr, ob der Zusammenhang direkt oder indirekt ist. Aus dem Verlauf der Regressionsgeraden jedoch, wird sichtbar, dass die Wassertemperatur negativ mit dem  $NAO_{FMA}$ -Index korreliert. Mit anderen Worten, je höher der  $NAO_{FMA}$ -Index ist, d.h. je sonniger, wärmer und trockener das Wetter ist, desto kleiner ist der Wert für den Tag vom Jahrestemperaturmaximum, d.h. um so früher wird die maximale Temperatur im Jahr erreicht. Das leicht höhere Bestimmtheitsmaß von 0,21 gegenüber 0,18 erklärt, dass die MWT etwas stärker vom Klima beeinflusst wird als die OWT. Umgekehrt ergibt sich eine positive Korrelation zwischen dem Tag der Jahresmaxima der Temperatur und dem Index nach Steinacker $_{SW(5)}$ .

Ein Vorherrschen von feuchten Südwestwinden führt zu einer Verzögerung des Erreichens der Jahresmaxima. Anhand des Bestimmtheitsmaßes ist zu sehen, dass die oberflächennahe Wasserschicht viel stärker vom Wetter beeinflusst wird als der gesamte Wasserkörper.  $NAO_{FMA}$ -Index und  $Steinacker_{SW(5)}$  sind negativ zueinander korreliert, wobei der erstere in den letzten 25 Jahren zugenommen und der letztere abgenommen hat.

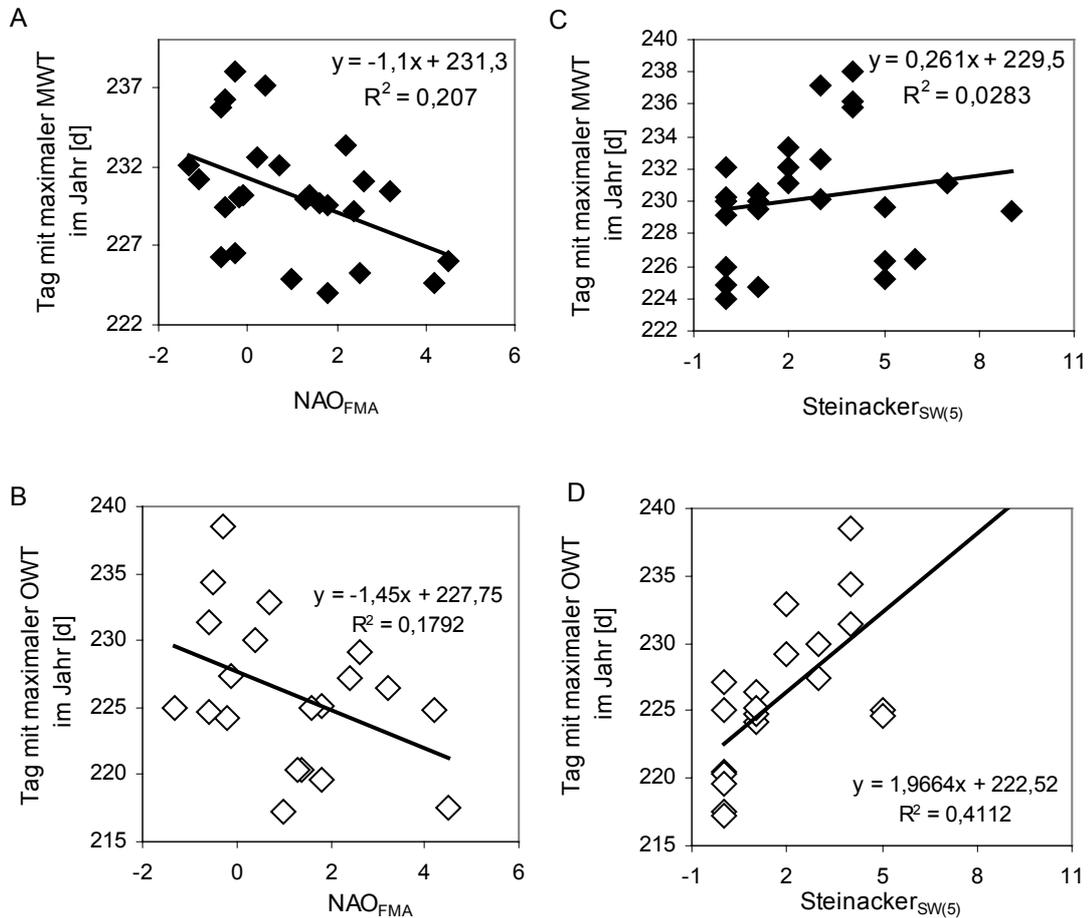


Abb. 14 A-D: Die Korrelation zwischen dem Tag der maximalen Temperatur im Mondsee und dem Klima- ( $NAO_{FMA}$ -Index, Abb. A-B) bzw Wetterindex ( $Steinacker_{SW(5)}$ , Abb. C-D). MWT werden in Abb. A und C, OWT in B und D gezeigt.

## 4.2. Unterwasser Lichtprofile – eine Exponentialfunktion

Die Intensität des Lichtes nimmt in einem Gewässer mit dessen Tiefe ab. Anhand von Abb. 15 wird deutlich, dass dieser Zusammenhang durch eine exponentielle Funktion dargestellt wird. Die Formel für die Lichtabnahme lautet nach Lampert und Sommer (1993):  $E_d(z) = E_d(0) \cdot e^{-k_d \cdot z}$ . Mit  $E_d(0)$  bezeichnen sie die Strahlungsintensität an der Oberfläche und mit  $E_d(z)$  ist die Strahlungsintensität in der Tiefe  $z$  gemeint. Die Konstante  $k_d$  nennt man vertikalen Attenuationskoeffizient. Sie gibt an, wie schnell das Licht absorbiert wird. Je höher  $k_d$  ist, desto schneller nimmt das Licht mit der Tiefe ab. Die Lichtattenuation wird nach Lampert und Sommer als Abnahme oder Abschwächung der Lichtintensität bezeichnet und tritt auf Grund von der Streuung an Partikeln und der Absorption durch Wasser auf.

Um den vertikalen Attenuationskoeffizienten berechnen zu können, wird die Lichtintensität [ $\mu\text{E m}^{-2} \text{s}^{-1}$ ] mit Hilfe eines Lichtmessgerätes (Li-CHOR Kugelsensor, Abb. 16) in 1m Abständen im Tiefenprofil im Wasser gemessen (Abb. 15). Die Einheit  $\mu\text{E m}^{-2} \text{s}^{-1}$  (E steht für Einstein) zählt zu den gebräuchlichsten Einheiten, um das Licht anzugeben. 1 Einstein ist festgelegt als 1 mol Photon (Lichtquant). Der Li-CHOR-Sensor misst die Lichtintensität über den Wellenlängenbereich von 400 – 700 nm, auch Bereich der photosynthetisch aktiven Strahlung (PAR) genannt.

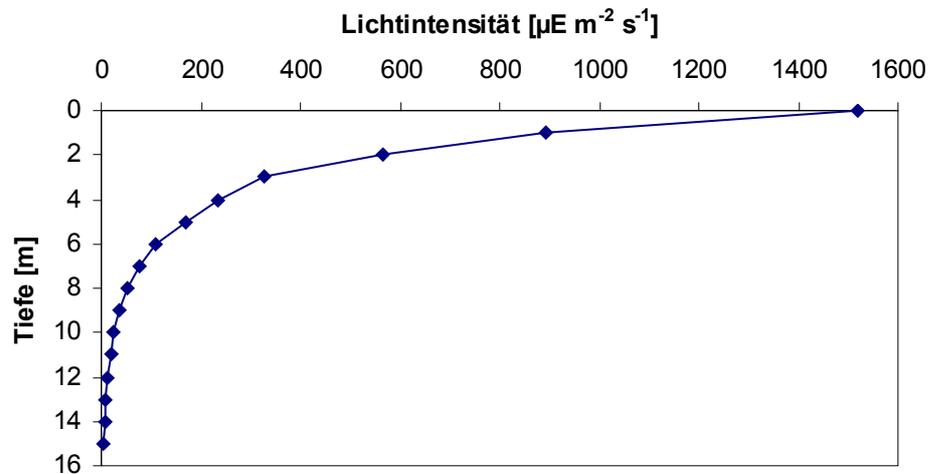


Abb. 15: Exponentielle Abnahme der Lichtintensität [ $\mu\text{E m}^{-2} \text{s}^{-1}$ ] mit der Wassertiefe im Mondsee am 30.03.2004.



Abb. 16: Geräte zum Messen der Lichtintensität (LI-CHOR Kugelsensor, 1) und der Sichttiefe (Secchi-Scheibe, 2).

#### 4.2.1. Beschreibung der Auswertung der Exponentialfunktion in einer Exceltabelle

Ich habe die Daten der Lichtmessung (LI-CHOR Kugelsensor, Abb. 16) am 21.03.2000 aus dem Mondsee ausgewählt, um anhand dieses Beispiels die Auswertung der Exponentialfunktion in Tabelle 3 näher zu erklären. Die Auswertung der gesamten Serie der Lichtmessungen für die zwei Jahre 1999 und 2000 erfolgt in Kapitel 4.2.2..

Beschreibung der einzelnen Spalten:

- Spalte A: Angabe der Tiefe im Wasser
- Spalte B: die mit dem LI-CHOR Kugelsensor gemessene Lichtintensität
- Spalte C: prozentuale Lichtintensität
- Spalte D: Angabe der Mächtigkeit der Wasserschicht, über welche die Lichtabnahme berechnet wurde
- Spalte E: der berechnete Attenuationskoeffizient  $k_d$  der jeweiligen Wasserschicht

Beschreibung von einzelnen Feldern:

- Feld E24: Berechnung des Mittelwertes der Attenuation
- Feld E25: Berechnung des Medianwertes der Attenuation
- Feld E27: Tiefe der euphotischen Zone ermittelt durch den Mittelwert der Attenuation
- Feld E28: Tiefe der euphotischen Zone ermittelt durch den Medianwert der Attenuation

Der Attenuationskoeffizient  $k_d$  in Spalte E wurde nach Lampert und Sommer (1993) mit

Hilfe der Formel  $k_d = \frac{\ln E_d(0) - \ln E_d(z)}{z}$  berechnet.

#### 4.2.2. Bewertung der Parameter der Unterwasser-Lichtprofile: Abhängigkeit der Lichtabnahme von der Trübe und der Algenentwicklung im See

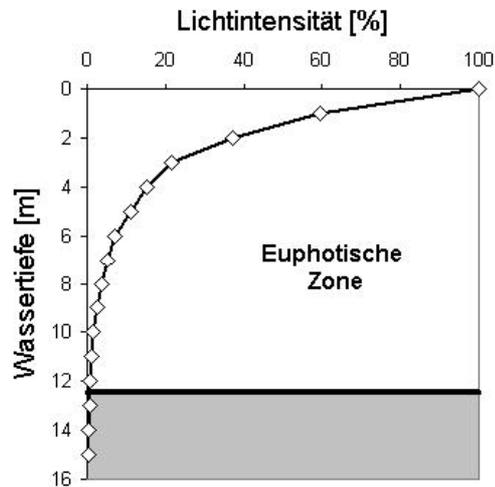


Abb. 17: Ein Beispiel für die prozentuelle Lichtabnahme im Mondsee am 30.03.2004. Die euphotische Zone entspricht der Wasserschicht mit mehr als 1 % Lichtintensität.

Algen sind Pflanzen, die zur Photosynthese Licht benötigen. Setzt man die Lichtintensität an der Wasseroberfläche gleich 100 %, ergibt sich eine prozentuale Abnahme der Lichtintensität mit zunehmender Wassertiefe. Algen können nur bis zu dieser Grenze von 1% Lichtintensität Photosynthese betreiben. Die Wasserschicht von 100 bis 1 % wird daher als euphotische Zone bezeichnet. Die schwarze Linie in Abb. 17 zeigt, wo sich die 1% Lichtgrenze befindet. Die weiße Fläche markiert die Größe der euphotischen Zone von 0-12,2 m. Die euphotische Zone in dem alpinen Mondsee schwankt im Verlauf der Jahre 1999 bis 2000 zwischen 9 und 15 m und beträgt im Durchschnitt 11,13 m (Abb. 18).

Eine andere Möglichkeit ist es mit der Secchi-Scheibe die Wassertrübe zu messen (Abb. 16). Man hält eine weiße Metallscheibe so tief ins Wasser bis man diese nicht mehr sieht. Beim Herausziehen misst man die Tiefe, bei der man die Secchi-Scheibe wieder erkennen kann. Diese so ermittelte Tiefe wird als Sichttiefe eines Gewässers bezeichnet.

Es ist klar, dass mit einer zunehmenden Wassertrübe die euphotische Zone und die Sichttiefe abnehmen. Abb. 19 zeigt den Vergleich zwischen der Sichttiefe und der euphotischen Zone über den Zeitraum 1999-2000. Der Bestimmtheitsgrad  $R = 0,57$  zeigt an, dass beiden Größen miteinander positiv korrelieren, d.h. direkt voneinander abhängig sind. In Abb. 20 wird die Abhängigkeit der euphotischen Zone von der Algenbiomasse gemessen als Chlorophyll-a-Konzentration gezeigt. Der negative Korrelationskoeffizient ( $R = -0,35$ ) verweist auf einen indirekten Zusammenhang zwischen beiden Größen. Je größer die Chlorophyll-a-Konzentration ist desto kleiner ist die Sichttiefe.

Wenn von einer bestimmten Lichtmessungen zum Beispiel die Daten von der euphotischen Zone fehlen, geht man normalerweise davon aus, dass das 3,2-fache der Sichttiefe der Tiefe der euphotischen Zone entspricht. Jedoch besitzen die organischen und anorganischen Teilchen (Algen und anorganische Schwebstoffe), welche die Gewässertrübung verursachen, unterschiedliche optische Eigenschaften. Für den Mondsee ergibt sich in der Abb. 19 ein relativ niedriger Korrelationskoeffizient von nur 0,57. Dieser geringe Zusammenhang ergibt sich im Mondsee aus der Tatsache, dass im Jahresverlauf entweder viel anorganische Trübe

oder viele Algen vorliegen. Deshalb ist der oben genannte Umrechnungsfaktor für den See Mondsee nicht geeignet.

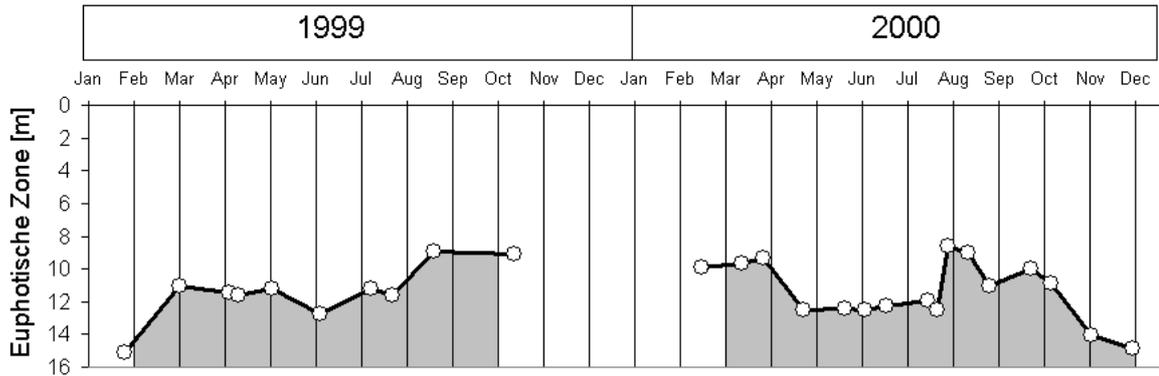


Abb. 18: Die Änderung der euphotischen Zone für die Jahre 1999 und 2000 im Mondsee.

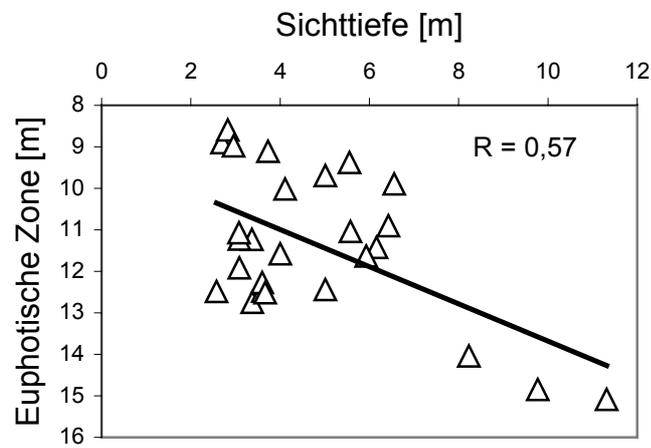


Abb. 19: Zusammenhang zwischen der Sichttiefe und der Tiefe der euphotischen Zone

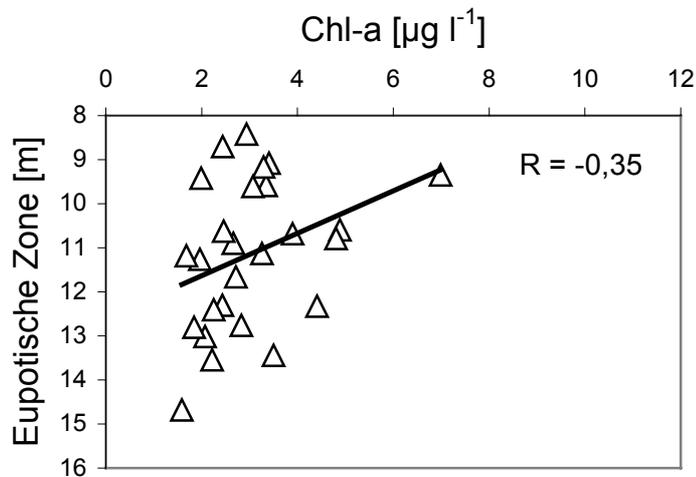


Abb. 20: Abhängigkeit der Algenbiomasse von der Tiefe der euphotischen Zone.

## 7. Abbildungs- und Tabellenverzeichnis

### Abbildungen

	Seite
Abb. 1: 3 fiktive Messwerte (Sternchen) und die dazugehörigen Funktionswerte auf der Geraden (Punkte). Die Abstände zwischen Sternchen und Punkten sollen möglichst klein werden, um eine möglichst gut angepasste Funktion zu erhalten.	4
Abb. 2: 4 Fiktive Lösungen (blaue Striche), die bei einer Kurvenanpassung basierend auf einer sinusförmigen Schwingung entstehen können.	8
Abb. 3: Eine Regressionsgerade ohne Gewichte (durchgehend) im Gegensatz zu einer Regressionsgeraden mit Gewichten (gestrichelt).	12
Abb. 4: Reale Messwerte (obere Kurve) vom Mondsee aus dem Jahr 1978 und den für die Anpassung verwendete unteren Datenverlauf, bei dem der Mittelwert (rund 6,3 K) subtrahiert wurde.	13
Abb. 5: Die gefittete Sinusschwingung im Vergleich zu den Messwerten (des Temperaturverlaufes aus dem Jahr 1978) minus deren Mittelwert.	17
Abb. 6: Abweichung der Werte von der Fitkurve.	17
Abb. 7: Darstellung der Originalwerte (gepunktet), der angepassten Sinusschwingung (schwarz) und der gefitteten Polynomfunktion (rot).	18
Abb. 8: Darstellung der Originalwerte (gepunktet), der angepassten Sinusschwingung (schwarz) und der gefitteten Polynomfunktion (rot) in einem Intervall von 0 bis 36,5, welches das Jahr repräsentiert.	18
Abb. 9: Darstellung der Originalwerte (gepunktet), der angepassten Sinusschwingung (schwarz) und der gefitteten Polynomfunktion (rot) in einem größeren Intervall.	19
Abb. 10: NAO-Index: Abweichung vom langfristigen Drei-Monatsmittel NAO (Monate Februar, März und April) ( $NAO_{FMA}$ -Index) von 1980 bis 2003. (Verändert nach <a href="http://www.cgd.ucar.edu/~jhurrell/indices.html">www.cgd.ucar.edu/~jhurrell/indices.html</a> (10. 11. 2004))	20
Abb. 11: Abhängigkeit der Jahresmittelwerte von der Lufttemperatur, der Sonneneinstrahlung und des Niederschlages im Salzkammergut sowie des Wasserstandes des Mondsees von dem Klima (jährlicher NAO-Index) für eine Periode der letzten 19 bis 24 Jahre. Die Geraden stellen die bestmögliche Anpassung der Regression grafisch dar und werden als Regressionsgeraden bezeichnet. Die gestrichelten Linien markieren den 95%-igen Vertrauensbereich. (Grafiken verändert nach Teubner & Dokulil, 2003).	21

- Abb. 12: Langzeitentwicklung der Wassertemperatur an der Oberfläche und über den gesamten Wasserkörper gemittelt im Mondsee von 1978 bis 2003. Die beiden Trendlinien zeigen eine Zunahme für beide Temperaturverläufe an. Weitere Erläuterung siehe Text. **22**
- Abb. 13 (A, B): A: Zeitpunkt des Tages im Jahr, bei dem die maximale Temperatur (MWT bzw. OWT) erreicht wurde. Diese Tage wurden mittels Kurvenanpassung basierend auf einer Sinusfunktion ermittelt. **23**  
 B: Zeitpunkt des Tages im Jahr, bei dem die maximale durchschnittliche Wassertemperatur (MWT) erreicht wurde. Das eine mal wurden die Werte der angepassten Sinusschwingung und das andere mal die Werte der Funktion ohne Kurvenanpassung verwendet.
- Abb. 14 A-D: Die Korrelation zwischen dem Tag der maximalen Temperatur im Mondsee und dem Klima- (NAO<sub>FMA</sub>-Index, Abb. A-B) bzw. Wetterindex (Steinacker<sub>SW(5)</sub>, Abb. C-D). MWT werden in Abb. A und C, OWT in B und D gezeigt. **24**
- Abb. 15: Exponentielle Abnahme der Lichtintensität [ $\mu\text{E m}^{-2} \text{s}^{-1}$ ] mit der Wassertiefe im Mondsee am 30.03.2004. **25**
- Abb. 16: Geräte zum Messen der Lichtintensität (LI-CHOR Kugelsensor, 1) und der Sichttiefe (Secchi-Scheibe, 2). **26**
- Abb. 17: Ein Beispiel für die prozentuelle Lichtabnahme im Mondsee am 30.03.2004. Die euphotische Zone entspricht der Wasserschicht mit mehr als 1 % Lichtintensität. **28**
- Abb. 18: Die Änderung der euphotischen Zone für die Jahre 1999 und 2000 im Mondsee. **29**
- Abb. 19: Zusammenhang zwischen der Sichttiefe und der Tiefe der euphotischen Zone. **29**
- Abb. 20: Abhängigkeit der Algenbiomasse von der Tiefe der euphotischen Zone. **29**

## Tabellen

- Tabelle 1: Exceltabelle zur Berechnung der sinusförmigen Kurvenanpassung der MWT und ihrer Parameter **15**
- Tabelle 2: Vergleich zwischen einem 365-Tage-Jahr und einem Jahr mit 365,25 Tagen. **16**
- Tabelle 3: Exceltabelle zur Berechnung der Lichtattenuation **27**

## **5. Zusammenfassung:**

Die Ökologie beschäftigt sich nach Brockhaus (2001) mit den Wechselbeziehungen zwischen den Organismen und der unbelebten (abiotische Faktoren wie Klima, Boden) und der belebten Umwelt (biotische Faktoren) sowie mit dem Stoff- und Energiehaushalt der Biosphäre. Die Untereinheiten der Biosphäre werden als Ökosysteme, d.h. als ein Wirkungsgefüge zwischen Lebewesen verschiedener Arten und ihrem Lebensraum definiert. Das Erforschen dieser Wechselbeziehungen erfordert die Veranschaulichung komplexer Zusammenhänge. Wird ein kleiner Teil in einem solchen Ökosystem verändert, so wirkt sich dies auch auf die benachbarten Gebiete aus. Die Ökosystemforschung untergliedert sich in den aquatischen und den terrestrischen Bereich.

In meiner Fachbereichsarbeit habe ich mich auf einen kleinen Ausschnitt aus der aquatischen Ökologie konzentriert. Das Ziel meiner Arbeit bestand darin ursächliche Zusammenhänge mittels mathematischer Modelle herauszufinden. Die Datenauswertung basierte auf ökologischen Messreihen.

Die Zweckmäßigkeit der mathematischen Kurvenanpassungen bei der Auswertung komplexer Zusammenhänge lässt sich mit Hilfe eines Vergleichs zwischen Originaldaten und Daten aus einer Kurvenanpassung überzeugend zeigen. Wie im Kapitel 3.1.2.1 beispielhaft anhand der mittleren Wassertemperatur (MWT) gezeigt wurde, variiert der Tag, an dem der Temperatur-Jahreshöchstwert auftritt, sehr stark. Die starke Variabilität der Originaldaten wird als „Rauschen“ bezeichnet und kann verschiedene messtechnische Ursachen wie falsches Ablesen von Werten, Fehler bei der Eichung von Geräten oder zeitliche Unregelmäßigkeit bei den Entnahmen von Proben haben. Ein solches Rauschen spiegelt damit eine Zufälligkeit der Werte ohne ökologische Bedeutung wieder. Der Nachteil eines starken Rauschens ist, dass der ursächliche Trend oder Zusammenhang, den man eigentlich untersuchen möchte, übertönt wird. Somit wäre der gesuchte Trend nicht mehr analysierbar. Um einer Zufälligkeit im Datensatz entgegenzuwirken, werden die Parameter über eine Kurvenanpassung berechnet und somit gefiltert. Das hier besprochene Beispiel der MWT veranschaulicht, dass die Zeitpunkte der Jahresmaxima, wenn sie einer angepassten Sinuskurve entnommen wurden (Berechnung der Phasenverschiebung einer Sinusschwingung siehe Kapitel 3.1.2.1.), an „zufälliger“ Variabilität verloren haben und daher den eigentlichen Trend zeigen. Aus diesem Grund werden die Parameter wie z.B. der Tag des Jahrestemperaturmaxima durch eine sinusförmige Kurvenanpassung ermittelt. Allgemein gesagt konnte ich damit zeigen, dass das Anwenden mathematischer Funktionen auf biologische Abläufe sinnvoll ist.

Die Ergebnisse meiner Fachbereichsarbeit zeigen, dass die errechneten Parameter einer angepassten Sinusschwingung gut mit dem Wetter-Index nach Steinacker korrelieren. Das heißt, dass das regionale Wetter die Temperatur im See entscheidend beeinflusst. Aber auch das Klima spielt für das aquatische Ökosystem See eine wichtige Rolle. Beim Betrachten der Parameter der Temperaturkurve lässt sich ein Trend, der durch das Klima verursacht wurde, dahingehend feststellen, dass sich der Zeitpunkt des Jahresmaxima der mittleren Wassertemperatur immer zeitiger im Jahr ereignet. Die Korrelation zwischen der mathematisch berechneten Lichtabnahme und der Chlorophyll-a-Konzentration weist darauf hin, dass das Lichtklima im Wasserkörper durch eine Trübe infolge der Algenentwicklung im wesentlichen bestimmt wird.

Ich habe mich, wie oben bereits erwähnt, mit einem kleinen Ausschnitt aus der aquatischen Ökologie beschäftigt. Da Organismen und Ökosysteme nicht rein mathematisch, physikalisch,

chemisch oder biologisch „funktionieren“, ist eine interdisziplinäre Bewertung notwendig. Mit meiner Fachbereichsarbeit konnte ich aufzeigen, dass die Mathematik die Grundlage für sinnvolle biologische Auswertungen darstellt. Nicht nur in der Biologie nehmen solche interdisziplinären Auswertungen einen zunehmenden Stellenwert ein.

## **6. Literaturverzeichnis**

Brockhaus (2001): Bibliographisches Institut & F. A., Mannheim.

Lampert, W. & U. Sommer (1993): Limnoökologie. Thiemeverlage. Stuttgart, New York, 440 Seiten.

Papula, L. (2001): Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 3. Vieweg. Braunschweig, Wiesbaden, 832 Seiten.

Steinacker, R. (2000): Eine ostalpine Strömungslagenklassifikation. Bericht Univ. Innsbruck, Institut für Meteorologie und Geophysik/ Univ. Wien, 8 Seiten.

Teubner, K. & M. Dokulil (2003): The impacts of climate on phytoplankton in an alpine lake. Int. Conf. on Changing Climate and Northern Aquatic Ecosystems, (Vortrag, 25. 9. 2003), Lammi, Finnland.

## **Literatur aus dem Internet**

[http://www.slcontrol.com/Interface/Fit\\_control.html](http://www.slcontrol.com/Interface/Fit_control.html) (23. 11. 2004)

<http://www.cgd.ucar.edu/~jhurrell/indices.html> (10. 11. 2004)

## **Erklärung**

Hiermit erkläre ich, dass die vorliegende Fachbereichsarbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Mondsee, den 22. 02. 2005